

روشهای جبر

جلد دوم

پرویز شهبازی

روشهای جبر

جلد دوم

(هندسهٔ تحلیلی و ورود به آنالیز)

تألیف پرویز شهریاری



مؤسسه انتشارات امیرکبیر

تهران، ۱۳۶۵



جلد دوم روشهای جبر که اختصاص به هندسه تحلیلی و مقدمه
آنالیز ریاضی دارد، روبروی شماست.

این کتاب هم با همان روش جلد اول تهیه شده است:
از ذکر مطالبی که در کتابهای درسی وجود دارد، پرهیز شده
است؛ کوشش شده است از ذکر تمرینها و مسأله‌هایی که در
کتابهای درسی و کتابهای مسأله‌ای بطور عادی وجود دارد،
خودداری شود؛ تکیه مطالب و مسأله‌ها بر این قرار گرفته است
که خواننده را به فکر وادارد و مفهومیهای ریاضی را عمیق‌تر
به او بیاموزد.

امید نویسنده اینست که از بررسی کتاب به وسیله افراد
دانش‌پژوه محروم نماند و از کمی‌های آن (که بدون شک
بسیار است)، آگاه شود.

اول شهریور ۱۳۵۳

پروین شهریاری

مطالب کتاب

۱. ورود به مطلب از صفحه ۹ تا صفحه ۲۰
۲. روش مختصات از صفحه ۲۱ تا صفحه ۳۷
هندسه تحلیلی (۲۳)، رابطه‌های مقدماتی (۲۴)، تغییر محورهای مختصات (۳۰)، مختصات قطبی (۳۲)، دستگاه مختصات مایل (۳۳)، تمرین (۳۴).
۳. خط راست - مکان هندسی - تقارن از صفحه ۳۹ تا صفحه ۶۰
نقطه متغیر (۴۱)، مکان هندسی (۴۲)، تقارن (۴۶)، خط راست (۵۰)، تمرین (۵۲).
۴. تابع - مشتق - پیوستگی - حد - کاربرد مشتق - رسم منحنی
از صفحه ۶۱ تا صفحه ۱۱۵
نوشتن تابع (۶۳)، فاصله معین بودن و فاصله تغییرات تابع (۶۷)، صعودی و نزولی بودن تابع (۶۹)، بررسی و رسم منحنی نمایش تغییرات تابع (۷۲)، بیان مفهوم تابع بر اساس نسبت‌های دوتایی (۷۴)، نسبت‌های دوتایی (۷۴)، تابع (۸۲)، تابع يك ارزشی (۸۷)، تابع معکوس (۸۸)، بعضی نکته‌ها درباره مشتق (۸۹)، مشتق تابعهای مثلثاتی (۹۰)، حدچپ و حدراست - پیوستگی تابع (۹۲)، تمرین (۹۳).
۵. مقادیر حد اکثر و حد اقل (ماکزیمم و می‌نیمم) از صفحه ۱۱۷ تا صفحه ۱۴۷
ماکزیمم و می‌نیمم نسبی و ماکزیمم و می‌نیمم مطلق (۱۱۹)، استدلال آزاد (۱۲۰)، محاسبه ماکزیمم و می‌نیمم مطلق با استفاده از مشتق (۱۲۵)، ماکزیمم يك حاصلضرب (۱۳۰)، می‌نیمم يك مجموع (۱۳۶)، تمرین (۱۴۲).

۶. تابع اولیه و محاسبه سطح و حجم از صفحه ۱۴۹ تا صفحه ۱۶۱
 روش کلی (۱۵۱)، تابعهای اولیه $y=f(x)(ax+b)^m$ ،
 تابعهای اولیه $y= \log^n x$ ، $y= \cos^{2n+1} x$ و $y= \sin^{2n+1} x$
 (۱۵۳)، تابعهای اولیه توانهای زوج سینوس و کسینوس (۱۵۴)،
 تمرین (۱۵۶).

۷. منحنیهای درجه دوم (مقاطع مخروطی) از صفحه ۱۶۳ تا صفحه ۱۹۶
 صورت کلی منحنیهای درجه دوم (۱۶۵)، وقتی که مقطع مخروطی،
 محوری موازی محور طول دارد (۱۷۱)، بیضی (۱۷۱)، هذلولی
 (۱۷۵)، سهمی (۱۸۵)، تمرین (۱۸۹).

حل مسأله‌ها از صفحه ۱۹۷ تا صفحه ۴۲۳
 روش مختصات (۱۹۸). خط راست. مکان هندسی. تقارن (۲۰۹)،
 تابع. مشتق. حد. پیوستگی. کاربرد مشتق. رسم منحنی (۲۲۹)،
 مقادیر حداکثر و حداقل (۳۴۰)، تابع اولیه و محاسبه سطح و
 حجم (۳۷۲)، منحنیهای درجه دوم (مقاطع مخروطی) (۳۹۱).

سرگرمی از صفحه ۴۲۵ تا صفحه ۴۵۵
 خط مماس بر منحنی - دو منحنی مماس برهم (۴۲۷)، محاسبه حد
 (۴۳۲)، چندمحاسبه (۴۳۳)، منحنیهای جالب (۴۴۷)، ریاضیات
 و گیاهشناسی (۴، ۲).

۱.

ورود به مطلب

این چند صفحه نه تاریخ است و نه فلسفه و در عین حال بهر دوی آنها شباهت دارد، در حقیقت دریچه ایست برای کسانی که به تاریخ و فلسفه ریاضی علاقه مندند و می خواهند دانش بشری را از دید انسانی آن مورد تحلیل قرار دهند و با کوششها و کوششهای مثبت و منفی آن آشنا شوند. گاه همین اشاره های کوتاه می تواند بسیاری از ذهنها را روشن کند و به آنها نشان دهد که نمی توان دانش انسانی را در محدوده در بسته و بی جان برنامه های مدرسه ای باز شناخت و وسیله ای برای گسترش دید آنها و محرکی برای مطالعات خارجی آنها شود تا شاید قانع شوند که برای بررسی دانش انسانی و دست یافتن به نایافته ها نمی توان به انبیا های پر از مسأله و جمله های کلیشه ای کتابهای آشنای دوران تحصیلی اکتفا کرد.

ورد آ نالیز عناصر بی نهایت کوچک در قلمرو علوم،
مانند هجوم طوفان و یاموج غیر قابل مقاومتی بود که
بکلی دانش ریاضی را زیر و رو کرد و به آن صورت
جدیدی بخشید.

پی بر روسو

دانش ریاضی، همچون همه دانشهای دیگر، زائیده نیازمندیهای
جامعه بشری است. بررسی تاریخ ریاضیات در دورانهای باستانی و در
سرزمینهای چین، بابل، مصر، هند و یونان بخوبی نشان می دهد که با
وجود پرده اسرار آمیزی که صاحبان دانش زمان، بر روی دانسته های خود
می کشیدند، هرگز نتوانستند پیوندهای خود را با جامعه خود و نیازهای
آن پاره کنند و اگر چه بظاهر در لاک خود فرو رفته بودند و در نظر دیگران
در عالم «روحانی و رمز گونه» خود گام بر می داشتند، تنها پاسخگوی
نیازمندیهای روزمره بودند: داد و ستدها، تقسیم زمین برای کشت و
بهره گیری از آن، ساختن معبد ها، کاخها و قلعه ها، گرد آوردن لشکر ها
و در کنار آن جمع آوری مالیاتها و باجها برای نگهداری آنها و...، کشش
های اصلی برای پدید آمدن مفهومیهای اولیه ریاضیات بود.

با وجود این نباید گمان کرد که راه پیشرفت ریاضیات، ساده و
مستقیم بوده است و هیچ عامل دیگری در آن اثر نداشته است.

گاهی رابطه دانش با نیازمندیهای جامعه، غیر مستقیم و با واسطه بوده است. به عنوان نمونه می توان از مذهب، سنتهای ملی و روال اجتماعی حاکم نام برد. از آنجا که بهر حال سرچشمه های دانش امروزی به میزان زیادی به دانش یونانی می پیوندد، بی مناسبت نیست که با «دوران طلایی» یونان باستان بیشتر آشنا شویم.

دوران شکفتگی دانش در یونان، همزمان با دورانی است که روال بردگی بر آنجا چیره بود و این روال اجتماعی به سختی در تفکر، فلسفه و دانش یونانی اثر گذاشت. کارهای عملی مربوط به برده ها بود نه درشان «مردم آزاد» و بهمین مناسبت بر خلاف امروز شعار «کار عاراست» بر جامعه یونانی حکومت می کرد. «مردم آزاد» نه تنها به کارهای عملی نمی پرداختند، بلکه شاخه هایی از دانش بشری را هم که کاربرد عملی داشت و در روابط انسانی گشایشی به وجود می آورد دوران مقام خود می پنداشتند؛ افلاطون، فیلسوف ذهن گرای یونانی، معتقد بود که تنها آن قسمتی از دانش را می توان به معنای واقعی خود «دانش» به حساب آورد که مطلقاً فایده عملی نداشته باشد. می گویند افلاطون بر سر در «آکادمی» خود نوشته بود: «هر کس هندسه نمی داند وارد نشود». بگذریم از اینکه اگر قرار باشد هندسه را به معنای واقعی خود، یعنی يك شاخه از دانش ریاضی که بر پایه استدلال منطقی قرار دارد، بگیریم، قبل از هر کس می بایست جلو خود افلاطون را بگیرند و به «آکادمی» راه ندهند: آنچه را که افلاطون هندسه می نامید معجونی از اشراق و فلسفه و هنر سنتی بود و میانه ای با منطق ریاضی نداشت. ولی بهر حال علت اصلی علاقه افلاطون به هندسه

از آنجا بود که گمان می کرد هندسه تنها با ذهن آدمی سروکار دارد و نمی تواند در صحنه عمل وارد شود.

به همین مناسبت (یعنی فرار از عمل) است که دانشمندان یونان باستان تا مرز هندسه عالی می رسند و حتی در بعضی موارد از آنهم می گذرند، در حالیکه در زمینه ریاضیات محاسبه های گام مهمی برداشته نمی شود و خود عدد نویسی هم در چارچوب ابتدایی خود باقی می ماند.

به ندرت می توان دانشمندانی از نوع اشمیدس در یونان باستان پیدا کرد که به مسأله های عملی پرداخته باشند و خارج از تفکرات فلسفی و ذهنی و از طریق مشاهده و تجربه، قانونهای حاکم بر جهان هستی را کشف کرده باشند.

این موضوع را از جهت دیگری هم می توان بررسی کرد. «دوران طلایی» یونان، دوران تسلط فلسفه است و زمانی است که دانش بسختی زیر نفوذ فلسفه قرار دارد و از آنجا که چارچوب فکری آن از قبل مشخص شده است، نمی تواند رشد عادی داشته باشد و تا حد زیادی نیروهای خارجی و داخلی مربوط به تکامل دانش را خنثی می کند.

این روش نادرست و غیر علمی، یعنی تلاش در تطبیق قانونهای موجود با تصور ذهنی یا فلسفی که از قبل آماده شده است، همیشه بسیاری را فریب داده است و از راه تحقیق منطقی دورنگاه داشته است.

اسمیت^۱ منجم انگلیسی، اعتقاد بی اندازه ای به دقت دانش مصریهای باستانی داشت و یکی از دلیلهای او وجود رابطه های هندسی شگفتی آور

بین اندازه‌های هرمهای مصری بود. وقتی که اسمیت اندازه‌های دیوار کفش‌کن اطاق فرعون رادر هرم خنوپس با نتیجه‌هایی که از قبل آماده کرده بود مطابق ندید، پنهانی سوهانی بدست گرفت و شروع به تراشیدن دیوار کرد تا واقعیت را باتصور ذهنی خود سازگار کند.

ولی حقیقت اینست که حتی افکار ذهن گرایانه و غیر علمی هم خود، راه پیشرفت دانش را، منتهی از بیراهه، می‌گشاید و بطور غیر مستقیم چارچوب تنگ نظرانه فلسفی خود را درهم می‌شکند.

فیثاغورث معتقد به «خدایی» عدد بود و بنای فکری و ساختمانی همه چیز را بر «عدد» می‌پنداشت. برای او و پیروانش جز «عدد»، مفهوم عینی دیگری وجود نداشت و همه تلاش آنها در اینجهت بود که جهان هستی را، اعم از مادی و معنوی، بر نظامی استوار سازند که خمیرمایه آن «عدد» بود و روشن است که این نظریه ذهنی و نادرست نمی‌توانست در صحنه عمل به کرسی بنشیند. ولی خود همین نظریه فلسفی موجب شد بسیاری روابط ناشناخته در جهان عدد و در برخوردی که این عدد با عناصر هندسی دارد، کشف شود. فیثاغورثیها، عدد گنگ را کشف کردند و خود این کشف تزلزلی در بنیان نظریه فلسفی آنها به وجود آورد.

فیثاغورثیها ثابت کردند که مجذور وتر در مثلث قائم الزاویه برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر مثلث. اگر مربعی به ضلع واحد در نظر بگیریم، امروز قطر آنرا به $\sqrt{2}$ نشان می‌دهیم. ولی در آن زمان عدد های گنگ شناخته نبود. آنها به دنبال عددی بودند که مجذورش مساوی ۲ شود و چنین عددی هم با معیارهای آن زمان، قابل بیان نبود. کشف

این واقعیت، تزلزلی در مبانی فکری فلسفه فیثاغورثیها ایجاد کرد. آنها که گمان می کردند همه چیز از طول و زمان و فاصله های موسیقی و حتی عواطف و افکار را می توان با معیار عدد (و البته بنا بر دانش آنها: عدد گویا) ارزیابی کرد، متوجه شدند که از میان طول یک پاره خط (قطر مربع به ضلع واحد) به کمک این عدد عاجزند. فیثاغورثیها تا مدت ها این کشف را از دیگران پنهان کردند^۱ و پیش خود این طور تعبیر کردند که پدیده های طبیعی بر دو نوع اند: آنها که با عدد قابل بیان اند و آنها که قابلیت بیان بوسیله عدد را ندارند. دسته اول را پدیده های گویا (منطق) و دسته دوم را پدیده های گنگ (اصم) نامیدند.

اصطلاح عددهای گویا و عددهای گنگ هم از همین تقسیم بندی فیثاغورثیها باقی مانده است.

ولی بهر حال این تغییر هم نتوانست فلسفه فیثاغورثی را نجات دهد و ظاهراً همین مطلب موجب از هم پاشیدگی جمع آنها شد.



پیروان مکتب فلسفی ایلایی^۲، به مناسبت مبانی خاص مورد اعتقاد خود در مورد ساختمان جهان، ناچار بودند در جهت نفی وجود حرکت

۱- فیثاغورثیها افکار خود را از دیگران پنهان می کردند و بخصوص تناقضی را که در مورد اندازه گیری قطر مربع با آن برخورد کرده بودند، همچون رازی بین خود مخفی کرده بودند. تا اینکه یکی از پیروان این مکتب بنام هیپازوس از اهالی هتالونت آنرا بر همه آشکار کرده که بنا بر روایتی به کیفر این گناه در آب غرق شد. این هیپازوس هان کسی است که برای نخستین بار دوازده وجهی منتظم باوجه های پنج ضلعی را کشف کرد.

تلاش کنند، بحثی که در این زمینه به وجود آمد، منجر به بررسی مفهوم پیچیده و جالبی شد که بعدها در همه جنبه‌های دانش بشری نام «پیوستگی و ناپیوستگی» بخود گرفت.

مفهوم «پیوستگی» با مفهوم «حرکت» ارتباط جدی دارد و بدون یکی نمی‌توان دیگری را توضیح داد. فیثاغورثیها معتقد به نوعی «پیوستگی ثابت» نقطه‌ها روی یک پاره خط بودند. به اعتقاد آنها یک پاره خط از عدد معینی نقطه‌های پیوسته بهم تشکیل شده بود. پارامینیدس^۱ فکر نقطه‌های بهم پیوسته را کنار گذاشت و جهان را یکپارچه و به صورت یک ماده واحد، که در همه جا بطور متجانس پخش شده است، در نظر گرفت. ماهیت فلسفه پارامینیدس هم ذهنی و غیر علمی بود و منجر به عدم قبول حرکت می‌شد: اگر جهان همه جا از یک ماده واحد پر شده است، بنابراین در داخل چنین جهانی حرکت ممکن نیست.

فیثاغورث و پارامینیدس هر دو فکر پیوستگی را پذیرفته بودند، منتهی هر کدام از جهتی حرکت را نفی می‌کردند و بهمین مناسبت هیچکدام از آنها نمی‌توانستند ساختمان واقعی جهان هستی را توضیح دهند.

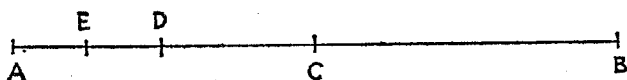
نون^۲ شاگرد پارامینیدس برای به کرسی نشاندن فلسفه استاد خود، چهار معما طرح کرد که همه آنها منجر به قبول عدم وجود حرکت در جهان مادی شد.

۱ - Paraménide - تولد ۴۲۵ پیش میلاد

۲ - zénon - متولد ۴۸۵ پیش از میلاد .

استدلالهای بظاهر منطقی، و در واقع نادرست زنون، دو نتیجه اساسی به همراه داشت: یکی اینکه با طرح آنها مفهوم بی نهایت (چه بی-نهایت کوچک و چه بی نهایت بزرگ) وارد در ریاضیات شد، مفهومی که یونانیها از نزدیک شدن به آن ترس داشتند^۱. دوم اینکه نتیجه گیریهای زنون چه در فلسفه و چه در ریاضیات بحثهایی را سبب شد که قرنهای طول کشید و اگرچه خود موضوع آنها، از لحاظ ریاضی در اواخر سده هفدهم و با وارد شدن مقادیر بی نهایت کوچک و مفهوم حد در ریاضیات به وسیله نیوتون و لایب نیس و از لحاظ فلسفی در اوایل سده بیستم و به وسیله نویسندگان کتاب «دقاتر فلسفی» حل شد، ولی در جریان این دوهزار سال بحث و بررسی، گامهای بزرگی چه در فلسفه و چه در ریاضیات برداشته شد.

۱- یکی از استدلالهای زنون چنین است:



متحرکی که بخواهد روی پاره خط AB از A به B برسد، باید قبلاً از نقطه C وسط AB عبور کند و برای اینکه به C برسد، باید قبلاً از D ، وسط AC ، بگذرد و برای این منظور باید قبلاً از E وسط AD عبور کند و ... به این ترتیب برای رسیدن از A به B باید از بی نهایت نقطه عبور کند که مستلزم زمان بی نهایت است.

در استدلال دیگر خود، زنون ثابت می کند که آشیل (قهرمان افسانه ای یونان) نمی تواند هرگز به لاک پشت برسد، زیرا:



اگر فرض کنیم لاک پشت در نقطه B و آشیل در نقطه A باشد، زمانی که آشیل فاصله A تا B را طی می کند، لاک پشت فاصله ای مثل B تا C را جلو می رود. بنابراین برای اینکه آشیل به لاک پشت برسد، باید فاصله جدید BC را به پیماید. اما در مدتی که آشیل BC را طی می کند، لاک پشت هم فاصله CD را جلو می رود و ... به این ترتیب لاک پشت همیشه از آشیل جلوتر است و اگرچه آشیل مرتباً به او نزدیک می شود، ولی هرگز به او نمی رسد.

این بحثها نتیجه دیگری هم داشت: علم زیر بار سنگین فلسفه رشد کرد و این رشد اثر متقابل خود را در فلسفه باقی گذاشت و خود بتدریج کوشید تا از زیر نفوذ فلسفه خلاص شود، تا جائیکه در سده‌های ۱۶ و ۱۷ خود را هم‌مطر از آن قرار داد و سپس از آنهم فراتر رفت و فلسفه را زیر نفوذ خود گرفت.^۱



قانونهای طبیعت را بدون وارد کردن کمیت‌های متغیر نمی‌توان شناخت. حرکت و تغییر جزو ذات طبیعت است. بقول نویسنده آنتی دورینگ: «حرکت شیوه وجود و طریقه هستی ماده است. هرگز و در هیچ مکانی، ماده بدون حرکت نبوده و نمی‌تواند باشد». بنا بر این وسیله شناسایی طبیعت هم باید با این خصوصیت اصلی آن سازگار باشد. وقتی که مفهوم متغیر به میدان وارد شود، بدنبال آن مفهوم تابع و سپس مفاهیم «پیوستگی» و «حد» ظاهر می‌شوند که هسته اصلی آنها را دو مفهوم «بی‌نهایت کوچکها» و «بی‌نهایت بزرگها» تشکیل می‌دهد. بحث درباره مجموعه این مفاهیم، «آنالیز ریاضی» را به وجود آورده است.

ریشه‌های آنالیز ریاضی را می‌توان در دورترین فعالیت‌های ریاضی گذشته هم پیدا کرد. آنتیفون^۲ برای محاسبه نسبت محیط دایره به قطر آن (یعنی محاسبه عدد π) این فکر را مطرح کرد که ابتدا يك مثلث متساوی-

۱- و مثلاً دیگر لایپ‌نیس تحت تاثیر بی‌نهایت کوچکها (که خود از بنیان گذاران آن در ریاضیات بود)، فلسفه ساختمان‌ی جهان را بر «مونا‌دها» گذاشت. «مونا‌ده فلسفی» لایپ‌نیس با «بی‌نهایت کوچک» ریاضی اوجه در تعریف وجه در ساختمان شباهت فراوانی دارد.

الاضلاع در دایره محاط کنیم، مسلم است که محیط این مثلث کمتر از محیط دایره خواهد بود، ولی اگر تعداد ضلعها را دو برابر کنیم و بجای مثلث يك شش ضلعی منتظم در نظر بگیریم، محیط آن به محیط دایره نزدیکتر می شود، بنابراین برای اینکه به محیط دایره برسیم، باید تا جاییکه می توانیم کار دو برابر کردن تعداد ضلعها را ادامه دهیم.

بروین شاکرد سقراط و بخصوص ارشمیدس این فکر را دنبال کردند. ارشمیدس توانست محیط ۳۸۴ ضلعی منتظم محاط در دایره را محاسبه کند و مقدار عدد π را با تقریب خوبی بدست آورد. علاوه بر آن ارشمیدس توانست بسیاری از مساحتها را به کمک تقریبهای متوالی و با روشی که به انتگرال گیری امروز شباهت دارد، پیدا کند. قبلاهم دیدیم معماهایی که زنون طرح کرده بود، پای بی نهایتها را به ریاضیات و فلسفه باز کرد.

حتی بحثهای بی پایان و در عین حال بی سر و ته کشیشهای قرون وسطی هم (باهمه اینکه در مجموع غیر علمی و در نتیجه بازدارنده پیشرفت فکر بشری بوده اند) بطور غیر مستقیم در طرح مفهوم بی نهایت اثر داشته اند. به قول پل تانری: «... مشاجرات پایان ناپذیر کشیشها درباره نخستین نشریات علمی، که موانع هرگونه جستجوی سالم علمی بود، و دائماً هم توسعه می یافت، تنها يك نتیجه داشت و آن این بود که دانشمندان را واداشت تا درباره حدود و بی نهایتها دقت بیشتری کنند و این دقت درباره موضوعهایی، که در تصور آنها مبهم و ناقص بود، نقش اساسی در به وجود آمدن حساب بی نهایت کوچکها داشت...»

ولی بحث جدی در مورد اصلها و قضیه‌های مربوط به حساب
بی‌نهایت کوچکها و بطور کلی آنالیز ریاضی در اوایل سدهٔ هفدهم و با
کوششهای پاسکال، کاوالیری^۱ فرما، دکارت، دوبروال^۲ شروع شد و با کارهای
لایب نیس و نیوتون و سپس اولر به اوج خود رسید.

۱- Cavalieri - ایتالیائی
۲- Roberval - ۱۶۰۱ تا ۱۶۷۵

۲.

روش مختصات

روش مختصات

روش مختصاتی، به معنای کلی خود، یعنی ایجاد رابطه بین جبر و هندسه، رابطه‌ای که بهر دورشته ریاضی قدرت بیشتری می‌دهد و این امکان را به وجود می‌آورد که مسأله‌های هندسی را به کمک جبر تحلیل کنیم و خاصیت‌های تازه‌ای از آنها را بشناسیم و در عین حال ویژه گیهای معادله‌های جبری را به کمک منحنی‌های هندسی آنها کشف کنیم.

ساده‌ترین عنصر جبر، عدد حقیقی و ساده‌ترین عنصر هندسه، نقطه است و بنا بر این طبیعی است که ایجاد رابطه را از همین دو عنصر ساده شروع کنیم.

این رابطه به طریق‌های مختلف ممکن است و ما در اینجا تنها به روش مختصات قائم (مشهور به مختصات دکارتی) می‌پردازیم که بابرنامه‌های دبیرستانی سازگار باشد.

فکر مختصات قائم راحتی در ترسیم‌هایی که بر دیوارهای داخلی‌هرمهای مصری باقی مانده است می‌توان دید، بعد از آنهم در طرح‌های اولیه نقشه‌های جغرافیایی و نجومی و حتی تابلوهای نقاشی می‌توان رد پای این فکر را دنبال کرد، ولی تنها فرما و دکارت بودند که آنرا بصورت رشته مشتق‌لی از ریاضی در آوردند.

۱. هندسه تحلیلی

در ابتدای سده هفدهم، شاخهٔ کاملاً تازه‌ای به نام هندسه تحلیلی در ریاضیات به وجود آمد که بستگی بین منحنی‌های مسطحه و معادله‌های دومجهولی جبری را برقرار کرد.

به ندرت و در عرض یکی دو سده پیش می‌آید که براساس فکری بسیار ساده و طبیعی، رشتهٔ کاملاً جدیدی در ریاضیات به وجود آید که تا آن زمان از نظرها دور مانده باشد. پدید آمدن هندسه تحلیلی در ابتدای سده هفدهم تصادفی نبود. گذار اروپا به روال تازهٔ اجتماعی، یعنی شکل سرمایه‌داری تولید، باز سازی و تکمیل رشته‌های زیادی از دانش بشری را ایجاب می‌کرد. گالیله و سایر دانشمندان شروع به بنیان‌گذاری مکانیک جدید کردند، در همهٔ رشته‌های علوم طبیعت مفروضه‌های تجربی زیادی جمع شد، ابزارهای مشاهده تکمیل شد، نظریه‌های تازه جانشین افکار کهنهٔ اسکولاستیکی شد. - در زمینهٔ نجوم سرانجام آموزش کوپرنیک پیروز شد. پیشرفت بیش از اندازهٔ دریانوردی بطور جدی به دانش نجوم و مقدمات مکانیک نیازمند شد.

در مکانیک مبارزه‌ای لازم بود. بیضی و سهمی که ویژه گیهای هندسی آنها، به عنوان مقاطع مخروطی، از قریب ۲۰۰۰ سال قبل به وسیلهٔ یونانیها به تفصیل روشن شده بود، تنها مطالبی از هندسه به حساب می‌آمدند (همانطور که یونانیها به آن می‌نگریستند). بعد از آنکه کپلر کشف کرد که سیارات روی محیط بیضی دور خورشید می‌چرخند و گالیله متوجه شد که سنگ پرتاب شده روی سهمی حرکت می‌کند، لازم بود که بیضی را محاسبه کرد، سهمی را که مسیر گلولهٔ توپ است بدست آورند؛ لازم بود قانونی را که بنابر آن فشار هوا در

ارتفاعها کم می شود، و به وسیله پاسکال کشف شده بود، جستجو کنند؛ لازم بود حجم جسمهای مختلف را بطور عملی محاسبه کنند و غیره.

مسألههایی از اینگونه، که دیگر وارد درزندگی بشر شده بود، تقریباً بطور همزمان سه شاخه تازه از ریاضیات را به وجود آورد: هندسه تحلیلی، محاسبههای دیفرانسیلی و محاسبههای انتگرالی (که ضمناً شامل حل معادلههای دیفرانسیلی هم می شد).

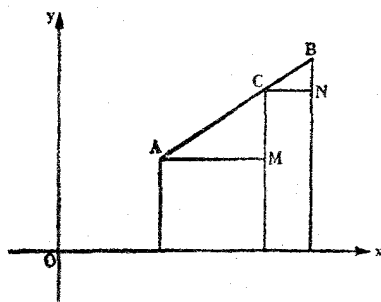
این سه نوع محاسبه جدید چهره تمامی ریاضیات را دگرگون کرد و آنرا به مسیر تازه ای انداخت. به کمک این رشتهها، مسألههایی مورد بررسی قرار گرفت که حل آنها تا آن زمان غیر ممکن بنظر می رسید.

در نیمه اول سده هفدهم، یعنی در ابتدای سالهای ۱۶۰۰، عدهای از ریاضیدانهای بزرگ به اندیشه هندسه تحلیلی نزدیک شده بودند، ولی تنها دو ریاضیدان بطور اساسی متوجه شدند که می توان از این اندیشه يك شاخه تازه در ریاضیات به وجود آورد. این دو نفر پیرفرما مشاور مجلس در تولوز یکی از شهرهای فرانسه و یکی از بزرگترین ریاضیدانهای جهان و دهنه دکارت فیلسوف مشهور فرانسوی بودند. همه کاشف اصلی هندسه تحلیلی را دکارت می شناسند. دکارت به عنوان يك فیلسوف، مسأله را به صورت کاملاً عمومی آن طرح کرد. دکارت رساله بزرگ فلسفی خود را چاپ کرد: «گفتار در روش، برای اینکه به عقل خود جهت یابی درست بدهیم و حقیقت را در دانشهای مربوط به شناسائی نور، هواشناسی، هندسه و آنچه که مربوط به آنهاست، کشف کنیم».

قسمت آخر این نوشته بنام «هندسه» که در سال ۱۶۳۷ چاپ شد، دارای توضیحاتی کافی، و البته کم و بیش درهم، درباره نظریه ای از ریاضیات است که ما آنرا «هندسه تحلیلی» می نامیم.

۲. رابطه های مقدماتی

I. تقسیم پاره خط به نسبت معلوم. نقطه های $\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ را در



شکل ۱

نظر می گیریم (شکل ۱)

و فرض می کنیم که نقطه

C پاره خط AB را به

نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کرده

باشد :

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$$

اگر مختصات نقطه C را (x, y) بگیریم، از تشابه دو مثلث قائم الزاویه

ACM و CBN داریم:

$$\frac{AM}{CN} = \frac{AC}{CB} ; \frac{MC}{NB} = \frac{AC}{CB}$$

که با قرار دادن مقادیر مربوطه بدست می آید:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n} ; \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n}$$

و از آنجا :

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} ; y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$

و روشن است در حالت خاصی که نقطه C وسط پاره خط AB باشد، این رابطه

چنین می شوند :

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) ; y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

مثال. نقطه های $A \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ ، $B \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ ، $C \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \end{vmatrix}$ مفروض اند. مطلوبست

مختصات نقطه G مرکز ثقل مثلث.

حل. می دانیم که مرکز ثقل هر مثلث بر محل برخورد میانه های آن قرار

دارد و نقطه برخورد میانه‌ها، هز میانه را به نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم می‌کند. بنابراین

$$\frac{GA}{GA'} = 2 \quad \text{اگر } A' \text{ را وسط ضلع } BC \text{ بگیریم، داریم:}$$

$$\text{از طرف دیگر داریم:} \quad A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \\ \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) \end{pmatrix} \quad \text{و سپس:}$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{2x_{A'} + x_A}{3} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \\ y_G = \frac{2y_{A'} + y_A}{3} = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) \end{cases}$$

II. مختصات مرکز ثقل دو نقطه مادی. می‌دانیم که اگر دو نقطه مادی

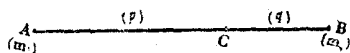
A و B با جرمهای m_1 و m_2 داشته باشیم و نقطه C مرکز ثقل این دو نقطه

باشد: اولاً C روی پاره خط AB

قرار دارد؛ ثانیاً اگر C پاره خط

AB را به نسبت $p : q$ تقسیم کرده

باشد، باید داشته باشیم:



شکل ۲

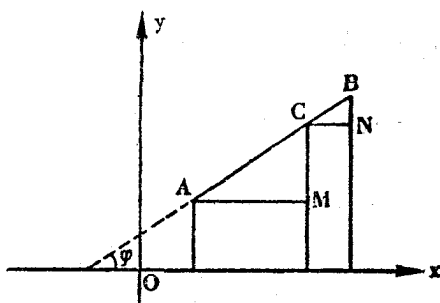
$$p:q = m_2:m_1$$

بنابراین بسادگی روشن است که اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ باشد،

برای پیدا کردن مختصات C (مرکز ثقل این دو نقطه) باید از رابطه‌های زیر استفاده کنیم:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad \text{و} \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

III. شرط اینکه سه نقطه روی یک خط راست باشند. سه نقطه



شکل ۳

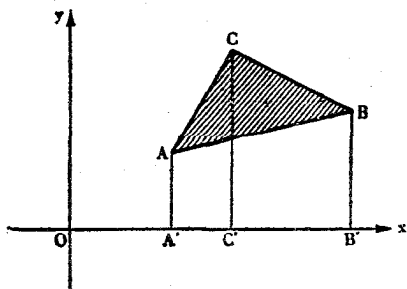
، $A(x_1, y_1)$
و $B(x_2, y_2)$
 $C(x_3, y_3)$
را در نظر می گیریم .
اگر C روی خط AB
باشد، بسادگی از تشابه
دو مثلث ACM و
 BCN (شکل ۳)
بدست می آید :

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} \quad (۱)$$

و همین رابطه شرط بر یک استقامت بودن A ، B و C را نشان می دهد .
هر یک از نسبت های تساوی (۱) برابر است با تانژانت زاویه ای که خط AB
باجهت مثبت محور طول می سازد؛ بطور کلی اگر زاویه خط AB را با جهت
مثبت محور طول φ بنامیم، داریم :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

محاسبه مساحت مثلث . نقطه های A ، B و C را در اس-
 $\begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$



شکل ۴

های یک مثلث در نظر می گیریم
(شکل ۴) . برای محاسبه مساحت
مثلث ABC می توان مساحت
ذوزنقه $AA'B'B$ را از مجموع
مساحت های دو ذوزنقه $AA'C'C$ و
 $CC'B'B$ کم کرد . داریم :

$$S_{AA'C'C} = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) ;$$

$$S_{CC'B'B} = \frac{1}{2}(y_2 + y_4)(x_4 - x_2) ;$$

$$\begin{aligned} S_{AA'B'B} &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) = \\ &= -\frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

وازا آنجا، اگر مساحت مثلث ABC را S بنامیم، بدست می آید:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2} [& (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) + \\ & + (y_3 + y_1)(x_1 - x_3)] \end{aligned}$$

مساحت مثلث باید با عددی مثبت بیان شود و بنا بر این همیشه باید قدر مطلق مقدار سمت راست تساوی را به حساب آورد، ولی اگر شکل مثلث را روی دستگاه محورهای مختصات در نظر بگیریم، می توانیم از قبل بدانیم که مقدار داخل قدر مطلق با چه علامتی بدست می آید. اگر حرکت از A بطرف B و سپس بطرف C در جهت مثلثاتی باشد، این مقدار مثبت و در غیر این صورت منفی می شود.

به عبارت دیگر مقدار داخل کرشه وقتی مثبت است که برای انطباق AB بر AC (به کمک دوران روی صفحه دور نقطه A) در جهت مثلثاتی حرکت کنیم و برعکس.

توضیح. رابطه مربوط به مساحت مثلث را به صورت زیر هم می توان در آورد:

$$S = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

و یا به صورت دترمینان درجه سوم زیر:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

واز همین جا می توان نتیجه گرفت که اگر A و B و C (رأسهای مثلث) روی يك خط راست باشند ، باید مساحت مثلث مساوی صفر شود ، یعنی شرط اینکه این سه نقطه بر يك خط راست واقع باشند اینست که :

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0 ;$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یا}$$

مثال. رأسهای مثلثی عبارتند از $A(-1, 3)$ ، $B(3, 0)$ و $C(8, 12)$.
مطلوبست محاسبه مساحت مثلث.

حل. روش اول : بنابر رابطه مساحت مثلث داریم:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} [(3+0)(-1-3) + (0+12)(3-8) + \\ &+ (12+3)(8+1)] = \frac{1}{2} |(-12-60+135)| = \frac{63}{2} = \\ &= 31\frac{1}{2} \quad (\text{واحد مربع}) \end{aligned}$$

روش دوم : اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ باشد برای محاسبه طول پاره خط AB داریم:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

به این ترتیب طول ضلعهای مثلث چنین می شود :

$$a = BC = 13 \text{ و } b = AC = 9\sqrt{2} \text{ و } c = AB = 5$$

c و b و a طول ضلعهای مثلث و بترتیب روبروی رأسهای A و B و C

هستند) .

از طرف دیگر می‌دانیم که رابطهٔ مساحت مثلث با در دست داشتن سه ضلع آن چنین است :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که در آن p برابر است با نصف محیط مثلث.
در اینجا داریم:

$$p = \frac{9}{2}(2 + \sqrt{2}) ; \quad p-a = \frac{1}{2}(9\sqrt{2} - 8) ;$$

$$p-b = \frac{9}{2}(2 - \sqrt{2}) \quad \text{و} \quad p-c = \frac{1}{2}(9\sqrt{2} + 8)$$

و سپس :

$$p(p-b) = \frac{81}{4}(4-2) = \frac{81}{2}$$

$$(p-a)(p-c) = \frac{1}{4}(162-64) = \frac{1}{4} \times 98 = \frac{49}{2}$$

و بالاخره :

$$S = \sqrt{\frac{81}{2} \times \frac{49}{2}} = \frac{63}{2} = 31\frac{1}{2} \quad (\text{واحد مربع})$$

۳. تغییر محوره‌های مختصات

I. انتقال محوره‌های مختصات به موازات خود. می‌دانیم که اگر دستگاه محوره‌های xOy را به موازات خود جابجا کنیم تا مبدأ جدید بر نقطهٔ $O'(\alpha, \beta)$ قرار گیرد، بین مختصات جدید (x', y') و مختصات قدیم (x, y) نقطهٔ A رابطه‌های زیر برقرار است:

$$x' = x - \alpha \quad \text{و} \quad y' = y - \beta$$

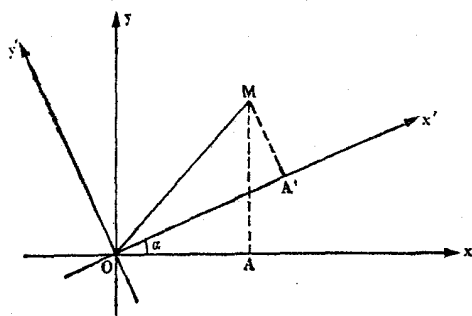
II. دوران محوره‌های مختصات دور مبدأ. حالت خاص. اگر محورها

را دور مبدأ مختصات به اندازهٔ 90° درجه، در جهت مثلثاتی دوران دهیم، محور جدید Ox' روی جهت مثبت محور قدیم Oy و محور جدید Oy' روی جهت منفی محور قدیم Ox قرار می‌گیرد. به این ترتیب x جدید مساوی همان y

قدیم و y جدید مساوی قرینه x قدیم خواهد شد، یعنی اگر مختصات جدید نقطه را (x', y') و مختصات قدیم آنرا (x, y) فرض کنیم، داریم:

$$x' = -y \text{ و } y' = x$$

حالت کلی. فرض کنید محورهای مختصات را به اندازه زاویه α دورمبداء



شکل ۵

دوران داده باشیم، تا دستگاه محورهای جدید $x'Oy'$ بدست آید. مختصات نقطه M را در دستگاه قدیم (x, y) و در دستگاه جدید (x', y') می گیریم (شکل ۵)، با توجه به حاصل جمع برداری داریم:

$$\vec{OM} = \vec{OA'} + \vec{A'M} \quad (۱)$$

رابطه (۱) را بر محور Ox تصویر می کنیم:

$$\vec{OM} \text{ تصویر} = \vec{OA'} \text{ تصویر} + \vec{A'M} \text{ تصویر}$$

و از آنجا، بنا بر خاصیت تصویر بر یک محور بدست می آید

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

و بهمین ترتیب اگر رابطه (۱) را بر محور Oy تصویر کنیم، بدست می آید:

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

که از این دوتساوی می توان، در صورت لزوم، x' و y' را هم بر حسب x و y محاسبه کرد.

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

مثال. نقطه $A(-2, 4)$ داده شده است، مطلوبست مختصات همین نقطه نسبت به دستگاه محورهاى مختصاتی که مبدأ آن در نقطه $O'(-1, 2)$ (نسبت به دستگاه قبلی) قرار گرفته است و محور Ox' آن با محور Ox زاویه‌ای مساوی 60° درجه می‌سازد.

حل. اگر مختصات A را در دستگاه جدید (x', y') بنامیم، داریم:

$$x' = -2 \cos 60^\circ + 4 \sin 60^\circ - (-1) = 2\sqrt{3}$$

$$y' = 2 \sin 60^\circ + 4 \cos 60^\circ - 2 = \sqrt{3}$$

یعنی $A(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ خواهد بود.

۴. مختصات قطبی

اگر محور Ox را در نظر بگیریم، هر نقطه M را می‌توان به وسیله فاصله



شکل ۶

آن از O (p) و زاویه‌ای که

OM با Ox می‌سازد (φ)

مشخص کرد (شکل ۶). در

اینصورت O را قطب، Ox را

محور قطبی، φ را زاویه قطبی

و p را شعاع حامل نقطه M و (p, φ) را مختصات قطبی نقطه M گویند.

زاویه قطبی φ می‌تواند از $-\pi$ تا $+\pi$ تغییر کند، به سادگی می‌توان

مختصات قائم را بر حسب مختصات قطبی محاسبه کرد. اگر مبدأ مختصات را

در دستگاه قائم منطبق بر قطب و محور طول را منطبق بر محور قطبی بگیریم،

مختصات (x, y) نقطه M چنین خواهد شد:

$$x = p \cos \varphi \quad \text{و} \quad y = p \sin \varphi$$

و برعکس برای رسیدن به مختصات قطبی از مختصات قائم داریم:

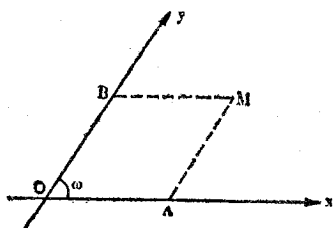
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} & (-\pi \leq \varphi \leq \pi) \\ p = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

در رابطه‌های اخیر برای φ دوجواب بدست می‌آید و برای اینکه بتوان

مقدار مشخص φ را معین کرد، باید از رابطه‌های زیر استفاده کنیم :

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{و} \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

۵. دستگاه مختصات مایل



شکل ۷

بجای آنکه محورهاى مختصات را عمود برهم انتخاب کنیم ، می‌توان آنها را بنحو دلخواه گرفت ، طوری که زاویه بین جهت مثبت محور طول با جهت مثبت محور عرض مساوی زاویه دلخواهی مثل ω باشد . در اینصورت زاویه ω را زاویه مختصاتی

و دستگاه مختصات را مایل گویند (شکل ۷). برای پیدا کردن مختصات نقطه‌ای مانند M باید از آنجا به موازى دو محور رسم کرد : اندازه OA طول و اندازه OB عرض نقطه M خواهد بود. روشن است که طول و عرض نقطه M در این حالت با اندازه فاصله‌های این نقطه تا محورهاى مختصات فرق دارد.

رابطه‌هایی که در دستگاه مختصات مایل بدست می‌آید، نسبت به رابطه‌های نظیر آنها در دستگاه مختصات قائم پیچیده‌ترند؛ مثلاً اگر زاویه مختصاتی را ω فرض کنیم، فاصله بین دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} AB &= \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega} \end{aligned}$$

و در حالت خاص فاصله نقطه $M(x, y)$ از مبدا :

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega}$$

مساحت مثلثی که رأسهای آن $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$

باشد، در این دستگاه مایل بارابطه زیر بیان می‌شود:

$$S = \frac{1}{r} \left| \sin \omega [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \right|$$

ولی رابطه‌هایی که مربوط به استقرار نقطه‌ها نسبت بهم است، در دستگاه مختصات مایل تغییر نمی‌کند و مثلاً رابطه مختصات وسط يك پاره خط یا مختصات مرکز ثقل يك مثلث و یا شرط بريك استقامت بودن سه نقطه همانست که در مورد دستگاه مختصات قائم بود.

در دستگاه مختصات مایل بازایوه مختصاتی ω رابطه زیر برای خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد بدست می‌آید:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\omega - \varphi)}$$

که در آن φ عبارتست از زاویه بین خط AB با جهت مثبت محور طول. با تبدیل این رابطه، می‌توان بسادگی زاویه φ را بدست آورد:

$$\tan \varphi = \frac{(y_B - y_A) \sin \omega}{(x_B - x_A) + (y_B - y_A) \cos \omega}$$

همچنین اگر در دوران محورهای مختصات، مبدأ ثابت و محور طول به اندازه زاویه α و محور عرض به اندازه زاویه β دوران کند و زاویه مختصاتی دستگاه قدیم را ω بگیریم، مختصات قدیم x, y بر حسب مختصات جدید x', y' چنین می‌شود:

$$x = \frac{x' \cdot \sin(\omega - \alpha) + y' \cdot \sin(\omega - \beta)}{\sin \omega}$$

$$y = \frac{x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \sin \beta}{\sin \omega}$$

تمرین

۱. نقطه‌های $A(-1, -1)$ و $B(2, 3)$ مفروض‌اند. مطلوبست رأس C از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و محاسبه مساحت و مختصات مرکز ثقل آن.

۲. نقطه‌های $A(-1, 4)$ و $B(3, 1)$ مفروض‌اند. مطلوبست مختصات رأس C از مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC ($C=90^\circ$).

۳. نقطه‌های $A(3, 1)$ و $B(0, 3)$ مفروض‌اند. مطلوبست مختصات رأس C از مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC ($A=90^\circ$).

۴. مختصات قرینهٔ هریک از نقطه‌های زیر را ابتدا نسبت به نیمساز ربع اول و سوم و سپس نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم پیدا کنید:

$$A(4, 2) \text{ و } B(-3, 1) \text{ و } C(0, -2)$$

۵. $A(-1, 2)$ و $C(-4, -1)$ مختصات دوسر قطر از یک مربع‌اند. مختصات دورأس دیگر مربع (B و D) را پیدا کنید.

۶. مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات را پیدا کنید که مختصات هریک از آنها در معادله یا نامعادله‌های زیر صدق کند.

$$\begin{aligned} \text{a) } x \cdot y &= 0, & \text{b) } x \cdot y &> 0, & \text{c) } x \cdot y &< 0, \\ \text{d) } x - y &= 0, & \text{e) } x - y &< 0, & \text{f) } x + y &= 0, \\ \text{g) } x + y &> 0, & \text{h) } x^2 + y^2 &= 0, & \text{i) } x^2 - y^2 &= 0, \\ \text{j) } x^2 + y^2 &> 0, & \text{k) } x + y &< 0, & \text{l) } x - y &> 0, \\ \text{m) } x(x-2) + y(y+4) + 5 &= 0, \\ \text{n) } 10x^2 + 29y^2 + 34xy + 8x + 14y + 2 &= 0, \\ \text{o) } x^2 + y^2 + 2x^2y^2 - 9x^2 - 10y^2 - 4x + 29 &= 0, \\ \text{p) } y &= \sqrt{\log \cos x}, & \text{q) } x &= \sqrt{\log \sin y}, \\ \text{r) } \log_{\cos x} (|y| - 2) &> 0, & \text{s) } y^2 + |x^2 - 1| &= 0 \end{aligned}$$

۷. $A(-1, 3)$ و $C(-2, 4)$ مختصات دو انتهای یکی از قطرهای لوزی $ABCD$ هستند. اگر طول یکی از ضلعهای لوزی مساوی $\sqrt{5}$ باشد، مختصات دورأس دیگر آنرا پیدا کنید.

۸. مرکز مربعی در نقطهٔ $\omega(3, -1)$ قرار دارد و $A(-1, 2)$ یکی از رأسهای آنست. مختصات رأسهای دیگر مربع را پیدا کنید.

۹. نقطه‌های $A'(-3, -2)$ ، $B'(0, -1)$ ، $C'(-1, 3)$ بترتیب وسط ضلعهای BC ، AC و AB از مثلث ABC هستند. اولاً- مطلوبست مختصات رأسهای مثلث ABC ومحاسبهٔ مساحت آن. ثانیاً- ثابت کنید مرکز ثقلهای دو مثلث ABC و $A'B'C'$ برهم منطبق‌اند.

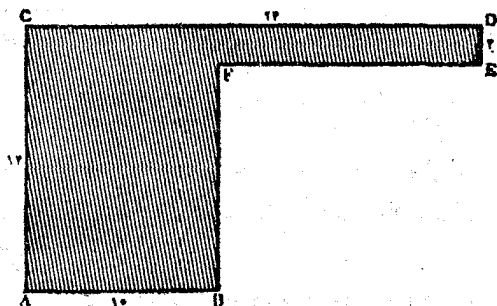
۱۰. $A(2, -3)$ و $B(-5, 1)$ دو رأس از مثلث ABC می‌باشند نقطهٔ C روی محور عرض و نقطهٔ G (محل تلاقی میانه‌های مثلث) روی محور طول قرار گرفته‌اند. مختصات رأس C را بدست آورید.

۱۱. p و q دو عدد طبیعی ونسبت بهم اولند. اگر x و y عدد‌های طبیعی غیر منفی باشند، چند عدد طبیعی وجود دارد که بتوان آنها را به‌صورت $px + qy$ نوشت؟

۱۲. در نقطه‌های $A(7, 1\frac{1}{2})$ ، $B(6, 7)$ ، $C(2, 4)$ بترتیب وزنه‌های ۶۰، ۱۰۰ و ۴۰ گرمی گذاشته شده است. مرکز ثقل این دستگاه را پیدا کنید.

۱۳. يك دستگاه مادی از n نقطهٔ $A_1(x_1, y_1)$ ، $A_2(x_2, y_2)$ ، $\dots$ ، $A_n(x_n, y_n)$ باجرمهای m_1 ، m_2 ، $\dots$ ، m_n تشکیل شده‌است. مختصات مرکز ثقل این دستگاه را پیدا کنید.

۱۴. اگر در شکل ۸، A مبدا و AB و AC محوره‌های مختصات



شکل ۸

انتخاب شوند، باتوجه به اندازهای آن، مختصات مرکز ثقل را پیدا کنید.

۱۵. متحرکی روی يك خط راست حرکت می کند و ضمن حرکت از نقطه های $A(5,5)$ و $B(1,3)$ عبور می کند. این متحرك در چه نقطه به محور طول می رسد؟

۱۶. نقطه های $A(1,3)$ ، $B(4,7)$ ، $C(2,8)$ و $D(-1,4)$ مفروض اند. اولاً تحقیق کنید که چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است. ثانیاً اگر AB را قاعده متوازی الاضلاع بگیریم، طول ارتفاع وارد بر آنرا پیدا کنید.

۱۷. نقطه های $A(4m-3, m+2)$ و $B(m, 2m+1)$ مفروض اند. اولاً ثابت کنید که با تغییر m ، خط AB به موازات خود جابجا می شود. ثانیاً نقطه ثابت C را طوری پیدا کنید که مثلثهای ABC به ازای همه مقادیر m بایکدیگر متشابه باشند.

۱۸. با در دست داشتن مختصات سه رأس يك مثلث و تنها با استفاده از رابطه مربوط به فاصله بین دو نقطه، مختصات محل برخورد سه ارتفاع آنرا پیدا کنید.

حالت خاص: $A(1,1)$ ، $B(2,-3)$ ، $C(-1,0)$.

۳.

خط راست

مکان هندسی - تقارن

این بخش به منظور یادآوری و احتمالاً دقیق‌تر کردن بعضی از مفهومی‌های اولیهٔ مربوط به هندسهٔ تحلیلی است. بابه وجود آمدن هندسهٔ تحلیلی و در نتیجهٔ حل مسأله‌های هندسی به کمک جبر، بسیاری از بحثهای هندسی روشن‌تر و دقیق‌تر می‌شود. ولی اگر احتمالاً به بعضی مبانی اساسی جبر و بخصوص جبر کمیتهای متغیر توجه نشود ممکن است نتیجه‌گیریها توأم با عدم دقت باشد و یا حتی در بعضی موارد نادرست از آب درآید. آنچه هم که در این بخش می‌آید (چه به عنوان درس و چه به عنوان مسأله) بخاطر توجه خوانندهٔ عزیز بهمین مبانی است.

۱- نقطه متغیر

نقطه‌ای مثل $A(-1, 3)$ نقطه‌ای ثابت است و در دستگاه محورهای مختصات جای مشخص و معینی دارد، در حالیکه نقطه $M(a-1, 3a)$ (که در آن a عددی است حقیقی و دلخواه)، نقطه‌ای است متغیر و با تغییر مقدار a ، جای آن عوض می‌شود. بعضی از این نقطه‌ها در جدول زیر داده شده است :

a	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴
x	-۵	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
y	-۱۲	-۹	-۶	-۳	۰	۳	۶	۹	۱۲

x و y نقطه M با واسطه a بهم مربوط اند و روشن است که اگر بخواهیم رابطه مستقیم بین طول و عرض نقطه M را بدست آوریم، باید a را بین دو معادله زیر حذف کنیم:

$$\begin{cases} x = a - 1 \\ y = 3a \end{cases} \Rightarrow y = 3x + 3$$

و می‌دانیم که $y = 3x + 3$ معادله یک خط راست است، یعنی نقطه M روی این خط حرکت می‌کند: اولاً به ازای هر مقدار دلخواه a ، نقطه M روی این خط قرار می‌گیرد، ثانیاً هر نقطه دلخواه از این خط مربوط به یکی از نقطه‌های M می‌باشد.

خط $y = 3x + 3$ را مکان هندسی نقطه متغیر M گویند.

۲- مکان هندسی

بطور کلی جستجوی معادله مکان هندسی يك نقطه متغیر، یعنی پیدا کردن رابطه‌ای بین طول و عرض این نقطه. از نظر محاسبه‌های جبری، به چند نوع مکان هندسی برخورد می‌کنیم که به کمک مثال به روشن کردن آنها می‌پردازیم.

I. وقتی مختصات نقطه به صورت پارامتری داده شده باشد.

مثال ۱. مطلوبست مکان هندسی نقطه $A(\sqrt{a-2}, 2a-8)$

حل. با حذف a بین x و y و با توجه به غیر منفی بودن x به دستگاه

زیر می‌رسیم:

$$y = 2x^2 - 4, x \geq 0$$

یعنی آن قسمت از منحنی نمایش

تغییرات تابع $y = 2x^2 - 4$

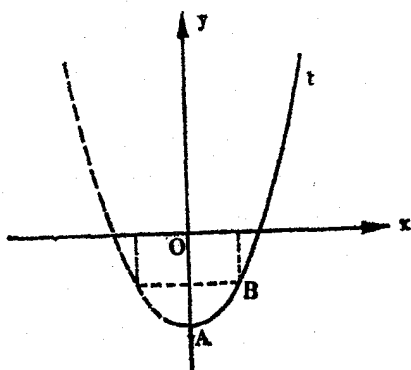
که در سمت راست و یا روی

محور عرض قرار گرفته است

(در شکل ۹ قوس ABt شکل

هندسی این مکان را نشان

می‌دهد).



شکل ۹

II. وقتی که نقطه متغیر

به شکل هندسی متغیر بستگی داشته باشد.

مثال ۲. مطلوبست مکان هندسی نقطه برخورد دو خط

$$\begin{cases} mx - 2y + 2 = 0 \\ x + y - m - 3 = 0 \end{cases}$$

حل. از حل این دو معادله دو مجهولی (نسبت به x و y)، مقادیر x و y

بر حسب m بدست می‌آید و حل آن به حالت قبل منجر می‌شود. در اینجا مختصات

نقطه برخورد دوخط، $M(2, m+1)$ می‌شود. نقطه متغیر M چنان حرکت می‌کند که طول آن مقداری ثابت و مساوی ۲ باقی بماند و بنابراین روی خط $x=2$ جابجا می‌شود.

مثال ۳. مطلوبست معادله مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه محوره‌های مختصات که مجموع فاصله‌های هر یک از آنها تا دو نقطه $F(c, 0)$ و $F'(-c, 0)$ مساوی مقدار ثابت $2a$ باشد.

حل. اگر یکی از نقطه‌های مکان را $M(x, y)$ بگیریم، طبق شرط مسأله باید داشته باشیم:

$$MF + MF' = 2a$$

و یا:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

این معادله را گویا می‌کنیم، به ترتیب داریم:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2,$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

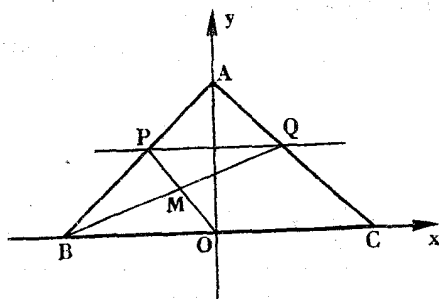
که اگر $a^2 - c^2 = b^2$ فرض کنیم، بعد از تقسیم دو طرف تساوی بر a^2b^2 بدست می‌آید:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

معادله مکان بدست آمد. همانطور که از هندسه می‌دانیم این مکان یک بیضی است. بنابراین معادله (۱)، معادله یک بیضی است که مرکز آن بر مبداء مختصات و دو قطر آن بر محوره‌های مختصات منطبق است (a و b بترتیب نیم قطرهای بزرگتر و کوچکتر و c نصف فاصله کانونی این بیضی است).

III. حل مسأله‌هایی که به صورت خالص هندسی‌اند.

مثال ۴. در مثلث متساوی الساقین $(AB=AC)ABC$ ، می دانیم طول ارتفاع AO مساوی نصف طول قاعده BC می باشد؛ خطی به موازی قاعده BC رسم کرده ایم تا ساقهای AB و AC را به ترتیب در P و Q قطع کند. مطلوبست مکان نقطه M محل برخورد OP و BQ وقتی که PQ به موازات خود حرکت می کند.



شکل ۱۰

حل. امتداد BC

را محور طول و عمود
منصف آن (یعنی امتداد
 OA) را محور عرض می-
گیریم. اگر طول OA
را واحد و معادله خط
 PQ را $y=a$ بگیریم،
بسادگی بدست می آید:

$$A \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}; B \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}; C \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

برای پیدا کردن مختصات نقطه P ، باید در معادله خط AB مقدار y را مساوی a بگیریم، $x_P = a - 1$ و از آنجا $x_Q = 1 - a$ بدست می آید. معادله خطهای OP و BQ را می نویسیم و از حل آنها (مثل دو معادله دو مجهولی)، مختصات نقطه M را بر حسب a بدست می آوریم:

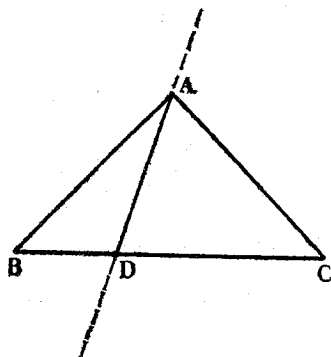
$$M\left(-\frac{a-1}{2a-3}, -\frac{a}{2a-3}\right)$$

به این ترتیب مسأله به حالت I منجر می شود و با حذف a بین x و y نقطه M ، مکان M بدست می آید:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{a-1}{2a-3} \\ y = -\frac{a}{2a-3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{3x+1}{2x+1} \\ a = \frac{3y}{2y+1} \end{array} \right.$$

$$\frac{3x+1}{2x+1} = \frac{3y}{2y+1} \Rightarrow y = 3x+1 \quad (۱)$$

معادله (۱) نشان می‌دهد که نقطه M خارج از خط $y = 3x+1$ نمی‌تواند باشد. اگر خط PQ را به موازات خود حرکت دهیم تا از A عبور کند، بسادگی معلوم می‌شود که باید A هم جزو این مکان باشد (با تحقیق هم معلوم می‌شود که مختصات نقطه A در معادله (۱) صدق می‌کند). وقتی که PQ بر BC منطبق شود، BQ بر BC و OP بر OB منطبق می‌شود و نقطه خاصی به عنوان محل برخورد آنها بدست نمی‌آید. از طرف دیگر اگر در معادله (۱)، $y = 0$ بگیریم $x = -\frac{1}{3}$ می‌شود و این به معنای آنست که خط مکان از نقطه ثلث قاعده عبور می‌کند، ولی خود این نقطه جزو مکان نیست.



شکل ۱۱

بطور خلاصه، وقتی که PQ در فاصله BC تا A حرکت کند، مکان عبارتست از پاره خط AD به استثنای نقطه D (شکل ۱۱)، و در حالتی که خط PQ بتواند از مرزهای BC و A بطرف پائین و بطرف بالا تایی نهایت عبور کند، مکان

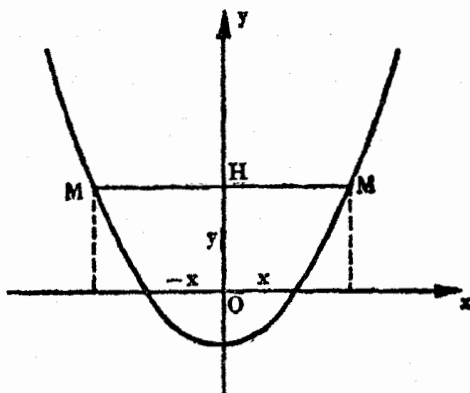
مطلوب عبارتست از خطی که از دو نقطه A و D می‌گذرد به استثنای خود نقطه D .

ضمناً برای نقطه D داریم: $DB:DC = \frac{1}{2}$.

۳. تقارن

I. محور تقارن يك منحنی. ازهندسه می دانیم که محور تقارن يك شكل مسطحه عبارتست ازخطی که قرینه منحنی نسبت به آن برخوردش منطبق شود. این تعریف را به این ترتیب هم می توان قبول کرد:

خطی را محور تقارن منحنی (c) گویند که اگر از نقطه دلخواه H واقع بر آن، عمودی بر محور اخراج کنیم تا منحنی (c) را در دو نقطه M و M' قطع کند، داشته باشیم: $HM = HM'$ (شکل ۱۲).



شکل ۱۲

این تعریف به معنای آنست که وقتی محور عرض محور تقارن منحنی است، اگر $M(x, y)$ متعلق به منحنی باشد، نقطه $M(-x, y)$ هم روی منحنی قرار دارد. به عبارت دیگر اگر در معادله منحنی، x را به $-x$ تبدیل کنیم y تغییر نمی کند، یعنی اگر داشته باشیم:

$$f(x, y) = f(-x, y)$$

محور عرض محور تقارن منحنی $f(x, y) = 0$ است. بهمین ترتیب وقتی که داشته باشیم:

$$f(x, y) = f(x, -y)$$

محور طول محور تقارن منحنی است. مثلاً برای منحنی نمایش تغییرات $y = \cos x$

$x^2 + y^2 = 1$ ، $y = x^2 - 4$ محور عرض محور تقارن است.

بطور خلاصه وقتی محور عرض محور تقارن $f(x, y) = 0$ است که

$f(x, y)$ نسبت به x زوج باشد، و وقتی محوطول محور تقارن است که نسبت به y زوج باشد.

مثال ۱. مطلوبست معادله محور تقارنی از منحنی تابع:

$$y = 2x^2 - 3x + 5$$

که موازی محور عرض باشد.

حل. این تابع نسبت به x زوج نیست و بنابراین خود محور عرض محور

تقارن منحنی آن نیست. معادله محور تقارن منحنی آنرا $x = a$ می گیریم و

معادله جدید منحنی را پیدا می کنیم، وقتی که محورهای مختصات را به موازات

خود حرکت دهیم تا مبدا جدید به نقطه $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ منتقل شود. اگر (X, Y)

مختصات جدید و (x, y) مختصات قدیم نقطه ای از منحنی این تابع باشد داریم:

$$x = X + a, \quad y = Y$$

و از آنجا معادله جدید منحنی چنین می شود:

$$Y = 2(X + a)^2 - 3(X + a) + 5$$

و یا:

$$Y = 2X^2 + (4a - 3)X + (2a^2 - 3a + 5)$$

چون خط $y = a$ در دستگاه جدید منطبق بر محور عرض است، بنابراین معادله

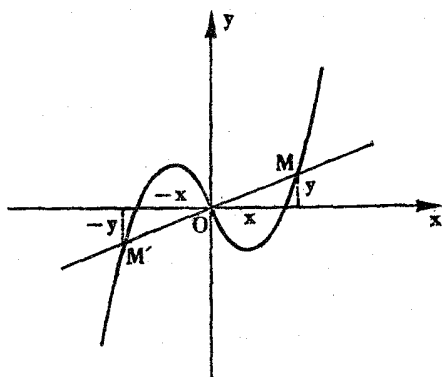
جدید منحنی باید نسبت به x زوج باشد و برای این منظور باید داشته باشیم:

$$4a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

یعنی خط $x = \frac{3}{4}$ یا $4x - 3 = 0$ معادله محور تقارن منحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y = 2x^2 - 3x + 5 \text{ است.}$$

II. مرکز تقارن يك منحنی. نقطه‌ای را مرکز تقارن يك منحنی گویند که قرینه منحنی نسبت به آن بر خود منحنی منطبق شود. به عبارت دیگر هر خطی که از مرکز تقارن بگذرد و منحنی را در دو نقطه قطع کند، این دو نقطه از مرکز تقارن يك فاصله‌اند.



شکل ۱۳

بنابراین تعریف

و با توجه به شکل ۱۳،

وقتی مبدا مختصات

مرکز تقارن منحنی تابع

$f(x, y) = 0$ است که

داشته باشیم:

$$f(x, y) = f(-x, -y)$$

یعنی با تبدیل x به $-x$

و y به $-y$ عبارت

$f(x, y)$ تغییر نکند (در

اینحالت گویند تابع $y = \varphi(x)$ فرد است).

مثال ۲. مرکز تقارن منحنی تابع $y = x^3 - 3x^2 + 4$ را پیدا کنید.

حل. $\omega(\alpha, \beta)$ را مرکز تقارن منحنی تابع می‌گیریم، باید با انتقال

مبدا به این نقطه به معادله‌ای برای منحنی برسیم که با تبدیل x به $-x$ و y به

$-y$ تغییر نکند؛ رابطه‌های انتقال محورها چنین‌اند:

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta$$

که اگر در معادله منحنی قرار دهیم، پس از عملهای لازم بدست می‌آید:

$$Y = X^3 + 3(\alpha - 1)X^2 + 3(\alpha^2 - 2\alpha)X + (\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4 - \beta)$$

و برای اینکه این تابع فرد باشد (یعنی با تبدیل X به $-X$ مقدار Y هم به

$-Y$ تبدیل شود)، باید ضریب X^2 و مقدار ثابت در طرف دوم تساوی، مساوی

صفر شود:

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \alpha^2 - 3\alpha + 4 - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

یعنی نقطه $\omega(1, 2)$ مرکز تقارن منحنی تابع $y = x^2 - 3x + 4$ است. مختصات نقطه ω در معادله منحنی صدق می‌کند، یعنی مرکز تقارن این منحنی بر خود منحنی قرار دارد.

مثال ۳. مطلوبست مرکز تقارن منحنی $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{1 - x}$.

حل. اگر $\omega(a, \beta)$ را مرکز تقارن منحنی بگیریم و مثل مثال ۲ عمل کنیم بالاخره به معادله زیر می‌رسیم.

$$X' + XY + (2\alpha + \beta + 2)X + (\alpha - 1)Y + (\alpha^2 + \alpha\beta + 2\alpha - \beta - 1) = 0$$

و برای اینکه این معادله با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ تغییر نکند باید ضریبهای X و Y مساوی صفر شود:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + 2 = 0 \\ \alpha - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

یعنی نقطه $\omega(1, -4)$ مرکز تقارن منحنی تابع مفروض است. مختصات این نقطه در معادله منحنی صدق نمی‌کند و بنابراین مرکز تقارن منحنی مفروض، روی منحنی واقع نیست.

III. پیدا کردن معادله قرینه يك منحنی نسبت بیک نقطه.

مثال ۴. مطلوبست معادله قرینه منحنی تابع $y = x^2$ نسبت به نقطه $\omega(3, 1)$.

حل. اگر نقطه (X, Y) را قرینه نقطه (x, y) منحنی نسبت به ω بگیریم

باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x + X = 6 \\ y + Y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - X \\ y = 2 - Y \end{cases}$$

که اگر در معادله منحنی مفروض قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$2 - Y = (6 - X)^2 \Rightarrow Y = -X^2 + 12X - 34$$

به این ترتیب معادله منحنی جدید $y = -x^2 + 12x - 34$ خواهد بود.

۴. خط راست

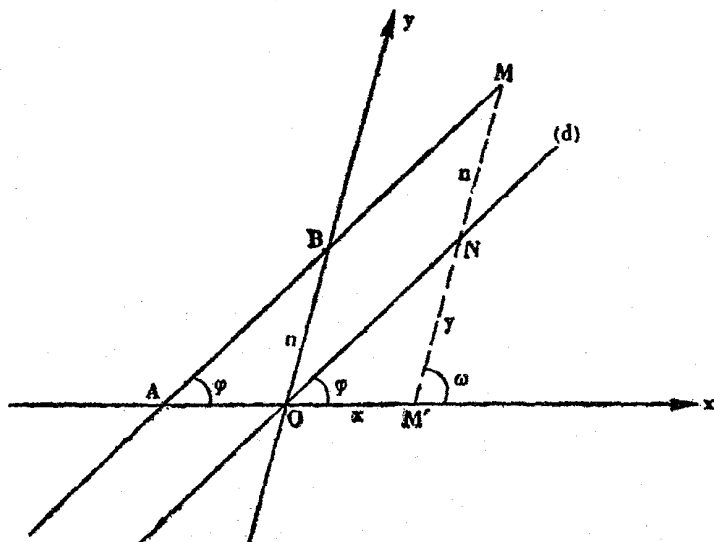
اگر خط راست موازی محور طول نباشد، می‌توان معادله آنرا (چهار دستگاه قائم و چه در دستگاه مایل) به صورت زیر نوشت:

$$y = mx + n$$

که m را ضریب زاویه و n را عرض از مبدا خط گویند.

از نقطه O مبدا مختصات در دستگاهی که زاویه مختصاتی آن ω است

خط d را به موازات خط AB (به معادله $y = mx + n$) رسم می‌کنیم (شکل ۱۴)، بسادگی معلوم می‌شود که معادله خط d به صورت $y = mx$ در



شکل ۱۴

می‌آید. در مثلث ONM' داریم:

$$\frac{y}{\sin \varphi} = \frac{x}{\sin(\omega - \varphi)} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\omega - \varphi)}$$

یعنی ضریب زاویه خطی که با جهت مثبت محور طول، زاویه‌ای مساوی φ می‌سازد در دستگاه با زاویه مختصاتی ω برابر است با:

$$m = \frac{\sin \varphi}{\sin(\omega - \varphi)}$$

و روشن است که وقتی $\omega = \frac{\pi}{2}$ باشد (یعنی دستگاه محورهای مختصات قائم باشد)، بدست می‌آید:

$$m = \frac{\sin \varphi}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \operatorname{tg} \varphi$$

اگر دو خط با ضریب زاویه‌های m و m' در نظر بگیریم و زاویه بین دو خط α باشد، در حالت کلی داریم:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(m' - m) \sin \omega}{1 + (m' + m) \cos \omega + m' m} \quad (۱)$$

و برای حالت $\omega = \frac{\pi}{2}$ (دستگاه مختصات قائم):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m' - m}{1 + m' m} \quad (۲)$$

بنابراین شرط توازی دو خط در هر حال:

$$m = m'$$

و شرط عمود بودن دو خط بر یکدیگر برای حالت کلی:

$$1 + (m' + m) \cos \omega + m' m = 0$$

و برای حالت دستگاه محورهای قائم:

$$m' \cdot m = -1$$

توضیح: زاویه α که از رابطه‌های (۱) یا (۲) بدست می‌آید عبارتست از زاویه‌ای که اگر خط با ضریب زاویه m به اندازه آن در جهت مثلثاتی دوران

کند بر خط با ضریب زاویه m' منطبق شود.

فاصله نقطه $M(x', y')$ از خط $Ax + By + C = 0$ در حالت محور
های مختصات قائم چنین است:

$$\delta = \frac{|Ax' + By' + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

و در حالت کلی:

$$\delta = \frac{|Ax' + By' + C| \sin \omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \omega}}$$

تمرین:

۱۹. تحقیق کنید که خطهای:

$$y = 3x - 1; \quad x - 7y = 7; \quad x + y - 7 = 0$$

ضلعهای يك مثلث متساوی الساقین را تشکیل می دهند.

۲۰. می دانیم که خطهای:

$$y = 3; \quad x - y + 4 = 0$$

دو ساق يك مثلث متساوی الساقین را تشکیل می دهند، اگر قاعده این مثلث از
مبداء مختصات عبور کند، معادله اش را پیدا کنید.

۲۱. مطلوبست معادله هریک از ضلعهای مجاور به زاویه قائمه در مثلث

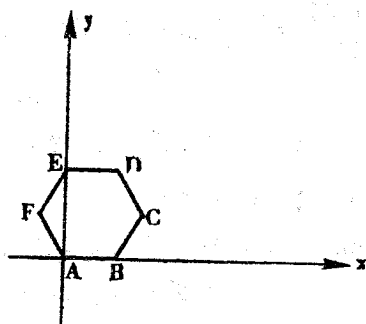
قائم الزاویه متساوی الساقینی که معادله وتر آن $y = 3x + 5$ و رأس قائمه آن
 $A(4, -1)$ باشد.

۲۲. در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقینی $B(5, 7)$ رأس یکی از زاویه

های حاده و $6x + 4y = 9$ معادله ضلع روبروی به این رأس می باشد؛ معادله
هریک از دو ضلع دیگر مثلث را پیدا کنید.

۲۳. $A(2, -4)$ یکی از رأسها و $M(5, 2)$ محل تلاقی قطرهای

يك مربع است. معادله ضلعهای این مربع را پیدا کنید.



شکل ۱۵

۲۴. معادله هریک از

ضلعهای شش ضلعی منتظم

ABCDEF را بدست آورید،

بشرطی که بدانیم محور طول

بر ضلع AB و محور عرض بر

قطر AE منطبق است (شکل

۱۵) و طول ضلع شش ضلعی

مساوی a است.

۲۵. A(۳,۵) و B(۶,۱) دو رأس و M(۴,۰) محل برخورد میانه‌های

مثلث ABC هستند. معادله هریک از ضلعهای مثلث را پیدا کنید.

۲۶. M(-۴, -۱) مرکز تجانس دو مثلث متشابه است. اگر رأسهای

مثلث کوچکتر A(-۳, -۲), B(۲, ۰), C(-۱, ۱) و نسبت تجانس

مساوی ۳ باشد، معادله هریک از ضلعهای مثلث بزرگتر را بدست آورید.

۲۷. معادله هریک از ضلعهای مجاور به زاویه قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای

را بدست آورید که مساحت آن مساوی ۲۰ واحد مربع، و وتر آن منطبق بر محور

طول و رأس زاویه قائمه آن منطبق بر نقطه C(-۱, ۴) باشد.

۲۸. خطی ضمن دوران خود دور نقطه B(۰, ۴) محور طول را در نقطه

M قطع می‌کند. معادله خط BM را در هریک از حالت‌های زیر بنویسید:

(۱) مساحت مثلث OBM مساوی ۶ واحد مربع باشد؛

(۲) پاره خط BM = ۷ باشد؛

(۳) زاویه BMO = ۳۰° باشد؛

(۴) BM بر خط $3x - 5y + 8 = 0$ عمود باشد.

۲۹. خط $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ مفروض است. نیم خطی که از مبدا مختصات

می‌گذرد این خط را در نقطه P قطع می‌کند، روی این نیم خط نقطه M

را چنان انتخاب می‌کنیم که $\frac{OM}{OP} = \lambda$ باشد، مطلوبست مکان هندسی نقطه M.

۳۰. تحقیق کنید که خطهای:

$$\sqrt{11}x - 5y + 30 = 0 \text{ و } 2x + \sqrt{5}y - 15 = 0$$

بريك دایره به مرکز مبداء مختصات مماس‌اند. شعاع این دایره و مختصات نقطه‌های تماس را پیدا کنید.

۳۱. روی محور طول نقطه‌ای پیدا کنید که از خط $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

به فاصله a باشد.

۳۲. از نقطه $P(-2, 1)$ خطی بگذرانید که از نقطه $C(3, 1)$ به فاصله

۴ باشد.

۳۳. مختصات مرکز دایره‌ای به شعاع $r=8$ را پیدا کنید که بردوخط

$$3x + 4y = 0 \text{ و } 3x - 4y + 10 = 0$$
 مماس باشد.

۳۴. معادله خطی را پیدا کنید که باخط $8x - 15y + 15 = 0$ موازی

و از نقطه $P(6, -2)$ به فاصله $\delta = 4$ باشد.

۳۵. معادله خطی را پیدا کنید که متعلق به هر دو دسته خط زیر باشد:

$$\begin{cases} (x+y-1)+q(x-1)=0 \\ (2x-3y)+q'(y+1)=0 \end{cases}$$

۳۶. معادله خطی را پیدا کنید که طول پاره خطی از آن که در ربع اول

محصور به محورهاست، دو برابر فاصله آن از مبداء باشد. ضمناً مساحت مثلثی که از این خط و محورهای مختصات تشکیل می‌شود مساوی $4/5$ واحد مربع است.

۳۷. $2x - 3y + 1 = 0$ و $x + 4y - 5 = 0$ معادله‌های ضلعهای

يك زاویه‌اند. این ضلعها خطهای موازی $y = 2x + b$ را قطع می‌کنند. مطلوبست مکان هندسی:

(۱) وسط پاره خطهایی از خطهای موازی که بین دو ضلع زاویه قرار دارند.
 (۲) نقطه ای از همین پاره خطها که آنها را به نسبت $\lambda = 3$ تقسیم می کنند.
 ۳۸. در يك مثلث متساوی الساقین، معادله قاعده $x - 2y + 3 = 0$ و معادله یکی از ساقها $4x - y + 5 = 0$ است. نقطه $P(1/2, 5/6)$ بر ساق دیگر قرار دارد. مطلوبست:

(۱) طول ارتفاع وارد بر یکی از ساقها؛

(۲) مختصات مرکز ثقل مثلث؛

(۳) مساحت مثلث.

۳۹. معادله های ضلع های مثلثی چنین اند:

$$2x - 5y = 2 \text{ و } x + y = 8 \text{ و } 5x - 2y = 5$$

نقطه ای در داخل این مثلث پیدا کنید که اگر از آنجا به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث هم ارز (یعنی با مساحت های مساوی) بدست آید.

۴۰. شعاع نوری از نقطه $A(3, 4)$ می گذرد و به خط $x + y = 2$ برخورد می کند و پس از بازتاب از نقطه $B(5, 2)$ عبور می کند. معادله شعاع تابش و شعاع بازتاب را پیدا کنید.

۴۱. از نقطه دلخواه M روی نیمساز ربع اول و سوم به نقطه $A(-2, 0)$ وصل می کنیم و MA را امتداد می دهیم تا محور عرض را در C قطع کند. سپس از M به نقطه $B(0, 2)$ وصل می کنیم و MB را امتداد می دهیم تا محور طول را در D قطع کند. ثابت کنید که وقتی M روی نیمساز حرکت کند خط CD همیشه از نقطه ثابتی می گذرد.

۴۲. روی صفحه محورها مختصات، همه نقطه های به مختصات (x, y) را پیدا کنید که برای هر کدام از آنها لا اقل يك مقدار t وجود داشته باشد که به ازای آن عبارت:

$$2\cos 2t + 4\sin 2x \sin t + 2\sin(x+y) - (\sin 2x - 1)^2$$

بزرگتر از واحد باشد. حوزه ای را که از این نقطه ها تشکیل شده است معین کنید.

۴۳. نقطه‌های $A(1, 3)$ ، $B(-3, -1)$ ، $C(3, -3)$ مفروض‌اند.

نامعادله‌هایی بنویسید که مختصات هر نقطه دلخواه واقع در داخل مثلث ABC در آنها صدق کند.

۴۴. مطلوبست معادله مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(-1, -3)$ مساوی ۶ باشد.

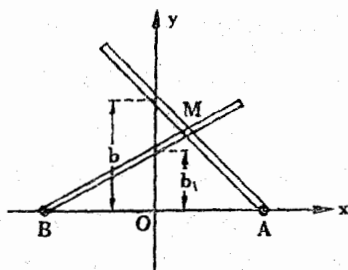
۴۵. مطلوبست معادله مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل فاصله‌های آن تا دو نقطه $F(c, 0)$ و $F'(-c, 0)$ مساوی مقدار ثابت $2a$ باشد.

۴۶. مطلوبست معادله مکان هندسی نقطه‌ای که از نقطه $F(\frac{P}{2}, 0)$

و خط $x = -\frac{P}{2}$ يك فاصله باشد.

۴۷. دو نقطه P و Q به فاصله $2b$ از یکدیگر قرار دارند. مطلوبست مکان هندسی نقطه‌ای که حاصلضرب فاصله‌های آن از این دو نقطه مساوی مقدار ثابت a^2 باشد.

۴۸. دو میله دور نقطه‌های ثابت $A(a, 0)$ و $B(-a, 0)$ حرکت

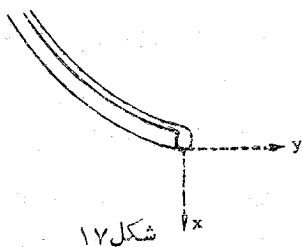


شکل ۱۶

می‌کنند (شکل ۱۶)، ضمناً حاصلضرب پاره خطهایی که این میله‌ها روی محور عرض جدا می‌کنند مقداری است ثابت: $a^2 = b \cdot b_1$. معادله مکان هندسی محل برخورد این دو میله را پیدا کنید.

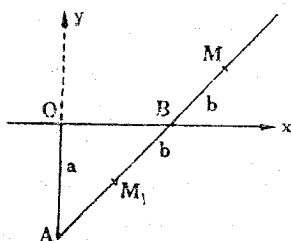
۴۹. مطلوبست معادله مکان هندسی رأس مثلثی که قاعده ثابت آن $a = 12$ و مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن $b^2 + c^2 = 100$ باشد. این مسأله را در حالت کلی هم حل کنید.

۵۰. معادله مکان هندسی مرکز دایره‌ای را پیدا کنید که بر محور طول مماس باشد و از نقطه $(۳, ۴)$ بگذرد.



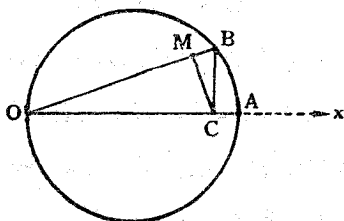
۵۱. گلوله‌ای داخل یک ناودان به پائین می‌غلتد (شکل ۱۶). سرعت این گلوله در لحظه‌ای که از انتهای آن به بیرون می‌افتد مساوی v است، اگر مماس در این نقطه افقی باشد، مسیر بعدی گلوله را پیدا کنید.

۵۲. دو نقطه با حرکت یکنواخت و سرعت‌های مساوی روی دو خط عمود بر هم حرکت می‌کنند. اگر وضع اولیه این دو نقطه را بدانیم، معادله مکان هندسی وسط پاره‌خطی را بنویسید که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند.



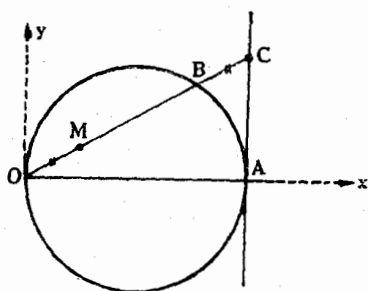
۵۳. از نقطه A ، که به فاصله a از خط ox قرار گرفته است خط دلخواهی رسم می‌کنیم تا ox را در B قطع کند؛ روی همین خط و در دو طرف نقطه B ، دو نقطه M و M_1 را به فاصله b تا نقطه B جدا می‌کنیم. مطلوب است مکان هندسی این دو نقطه (شکل ۱۸).

۵۴. دایره به قطر $OA = 2r$ مفروض است (شکل ۱۹). از نقطه O



و تر OB را رسم می‌کنیم و از نقطه B ، انتهای این وتر، عمود BC را بر قطر OA فرود می‌آوریم، سپس از C ، پای این عمود، عمودی بر وتر OB رسم می‌کنیم. مطلوب است مکان نقطه M پای این عمود، وقتی که وتر OB دور نقطه O حرکت کند.

۵۵. دایره‌ای به شعاع r و نقطه O واقع بر محیط آن مفروض است. نیم خطی دور O' دوران می‌کند، نقطه برخورد این نیم خط را با دایره A می‌نامیم، روی OA طول $AM=BA$ را در جهت مثبت نیم خط جدا می‌کنیم (B انتهای دیگر قطری است که از O می‌گذرد). مطلوبست معادله مسیر M وقتی که نیم خط دور O دوران می‌کند.



شکل ۲۰

۵۶. دایره‌ای به قطر

$OA=2r$ مفروض است (شکل

۲۰). از A مماسی بر دایره رسم

کرده‌ایم و از O نیم خطی می‌کشیم تا

دایره را در B و مماس را در C قطع

کند. روی این نیم خط $OM=BC$

را جدا می‌کنیم. مطلوبست معادله

مکان M ، وقتی که نیم خط دور نقطه

O دوران می‌کند.

۵۷. دو ضلع يك مستطیل بر محورهای مختصات قرار دارد. این مستطیل طوری تغییر می‌کند که قطر آن همیشه مساوی مقدار ثابت a باشد. از رأس مستطیل که در مقابل مبدأ مختصات قرار گرفته است عمودی بر قطر آن فرود می‌آوریم. مطلوبست معادله مکان هندسی پای این عمود.

۵۸. زاویه MON مساوی α ، پاره خط l و عدد m مفروض است.

روی خطهای OM و ON نقطه‌های A و B را چنان انتخاب می‌کنیم که

$AB=l$ باشد. مطلوبست مکان هندسی نقطه P که پاره خط AB را به نسبت

m تقسیم می‌کند ($AP:PB=m$).

۵۹. مطلوبست مکان هندسی مرکز مستطیلی که در مثلث مفروض

محاط باشد.

۶۰. درهریک از حالت‌های زیر معادله مکان هندسی نقطه مربوطه را به صورت رابطه‌ای بین x و y پیدا کنید:

$$۱) \begin{cases} x = \frac{a}{2}(t + \frac{1}{t}) \\ y = \frac{b}{2}(t - \frac{1}{t}) \end{cases};$$

$$۲) \begin{cases} x = t^2 + t + ۱ \\ y = t^2 - t + ۱ \end{cases}$$

$$۳) \begin{cases} x = 2t^2 - 3t + ۱ \\ y = 3t^2 + 2t - ۱۶ \end{cases};$$

$$۴) \begin{cases} x = \sin \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} \\ y = \cos \alpha - \frac{1}{\cos \alpha} \end{cases}$$

$$۵) \begin{cases} x = \sin \alpha + \cos \alpha \\ y = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \end{cases}$$

۶۱. «فاصله» بین دو نقطه را در صفحه به این ترتیب تعریف می‌کنیم:
اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ و $P(A, B)$ به معنای «فاصله» این دو نقطه باشد، دراینصورت:

$$P(A, B) = \operatorname{Max}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

یعنی از دو عدد $|x_1 - x_2|$ و $|y_1 - y_2|$ آنرا که بزرگتر است «فاصله» دو نقطه A و B می‌نامیم.

باتوجه به این تعریف، مطلوبست مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطه $A(0, 2)$ و $B(1, 4)$ يك «فاصله» باشد.

۶۲. مرکز تقارن را درهریک از منحنی تابعهای زیر پیدا کنید.

$$۱) y = \frac{(x-1)^2}{2(2x-1)}; \quad ۲) 3x^2 + y^2 - 4x + 5y = 0$$

$$۳) y = x^3 - 3x^2 + 5x - ۱;$$

$$۴) x^2 - 2y^2 + 4x + 2y = ۱;$$

۶۳. محور تقارن منحنی تابع $y^2 + 1 = 2(2x + y)$ را که موازی محور طول است پیدا کنید.

۶۴. مرکزهای تقارن منحنی تابع $y = \sin^2 x$ را پیدا کنید.

۶۵. محورهای تقارن موازی محور عرض را در منحنی نمایش تغییرات تابع $y = a \sin x + b \cos x + c$ بدست آورید.

۶۶. تابع $y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$ چه شرطی داشته باشد تا منحنی آن دارای مرکز تقارن باشد؟

۶۷. تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ مفروض است. معادله منحنی قرینه آنرا نسبت به خط $x=2$ پیدا کنید.

۶۸. تابع $y = x^2 - 2x$ مفروض است. معادله منحنی قرینه آنرا نسبت به نقطه $\omega(-1, -2)$ بدست آورید.

۶۹. معادله قرینه منحنی تابع $y = \frac{x^2}{2x-1}$ را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم پیدا کنید.

۷۰. معادله قرینه منحنی تابع $y = x^2 + 2x - 1$ را نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم پیدا کنید.

۷۱. در مورد هر يك از منحنی تابعهای زیر، محورهای تقارن را مشخص کنید:

۱) $y = x^2 + |x-3| - 6x + 7$;

۲) $||y+2|-3| = |2-|x-1||$;

۳) $\log_{x^2+2x+2}(y^2-4y+4) = 2$;

۴) $|y+1| = \frac{x^2-2x^2}{2|x-2|}$; ۵) $y = ||x+1|-2|$;

۶) $||y|-3| = ||x+2|-1| + 2$

۷) $2|y+4| = x^2 - 6x + 9$

۴.

تابع

مشتق - حد - پیوستگی -

کاربرد مشتق - رسم

منحنی

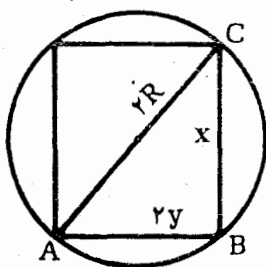
در این بخش از اساسی ترین مفاهیم مربوط به ریاضیات با کمیته های متغیر گفتگو می شود. مفاهیمی از نوع «تابع»، «پیوستگی»، «حد» و مانند آنها، ستونهای اصلی و بنیادی این دوره از ریاضیات بشمار می روند و بدون درک درست آنها حتی يك گام هم نمی توان برداشت. اگر چه در این کتاب بمناسبت قید و بندهای برنامه ای، نمی توان با دقت کامل پیش رفت، ولی بهر حال توصیه جدی ما به خواننده کتاب اینست که نفهمیده وقانع نشده از این بخش نگذرد.

در اینجا بدون اینکه وارد در بحث دقیق نظری بشویم سعی می‌کنیم بیشتر با ذکر مثال از مفاهیمهای مختلف مربوط به تابع گفتگو کنیم. ضمناً بحثی هم در باره مفهوم تابع بادی جدید آن (به کمک مجموعه‌ها) خواهیم آورد.

۱- نوشتن تابع

مثال ۱. در کره‌ای به شعاع R استوانه‌ای محاط کرده‌ایم. مطلوبست رابطه‌ی تابعی حجم V و سطح جانبی P از استوانه نسبت به متغیر ارتفاع آن x . این تابعها در چه فاصله‌هایی معین هستند؟

حل. شعاع قاعده استوانه را y و ارتفاع آنرا x می‌گیریم (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

در این صورت داریم:

$$V = \pi y^2 x \quad \text{و} \quad P = 2\pi y x$$

تغییر x ، مقدار y هم تغییر می‌کند و

می‌توان رابطه بین x و y را بدست

آورد. از مثلث قائم الزاویه ABC

داریم: $x^2 + y^2 = R^2$ و از

آنجا:

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - x^2}$$

که اگر مقدار y را در رابطه‌های مربوط به حجم و سطح جانبی قرار دهیم بدست می‌آید:

$$V = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{4} \right); \quad P = \pi x \sqrt{4R^2 - x^2}$$

و روشن است که هر دو تابع در فاصله $0 < x < 2R$ معین هستند.

مثال ۲. در يك مثلث متساوی الساقین مقدار مساحت ثابت و طول ضلعها متغیر است. طول ۱ ساق این مثلث را به صورت تابعی از قاعده آن بنویسید و حوزه معین بودن آنرا پیدا کنید.

جواب: $l = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4s^2}{a^2}}$ که در آن a طول قاعده و s مساحت

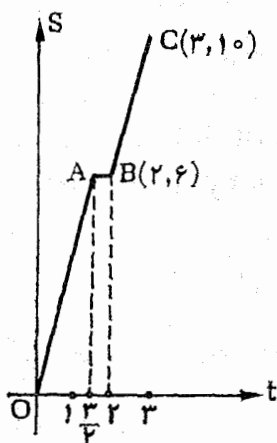
مثلث است. حوزه معین بودن تابع با شرط $a > 0$ مشخص می شود.

مثال ۳. يك دسته پیش آهنگ دريك راه پیمائی سه ساعته، ساعتی ۴ کیلومتر حرکت می کند. بعد از يك ساعت و نیم راه پیمائی هم نیم ساعت استراحت دارد. طول راه S را به عنوان تابعی از زمان t بنویسید. نمایش تغییرات این تابع را رسم کنید. فاصله معین بودن و فاصله تغییرات تابع را معین کنید.

حل. وقتی که $0 \leq t \leq \frac{3}{4}$ باشد داریم: $S = 4t$. در فاصله $\frac{3}{4} < t < 2$ دسته

استراحت می کند و جمع راه طی شده تغییر نمی کند. در $\frac{3}{4}$ ساعت $4 \times \frac{3}{4} = 3$ کیلومتر راه طی شده است. به ازای $2 < t < 3$ داریم:

$S = 6 + 4(t - 2) = 4t - 2$. به این ترتیب داریم:



شکل ۲۲

$$S = \begin{cases} 4t & (0 \leq t \leq \frac{3}{4}) \\ 6 & (\frac{3}{4} < t < 2) \\ 4t - 2 & (2 \leq t \leq 3) \end{cases}$$

تابع در فاصله $0 \leq t \leq 3$ معین است و مقدار تابع در فاصله $0 \leq S \leq 10$ تغییر می کند.

برای رسم نمایش تغییرات این تابع (شکل ۲۲) باید در دستگاه tOS خط $S = 4t$ را در فاصله

در فاصله $0 \leq t \leq \frac{3}{4}$ ، خط $S = 6$ را در فاصله $\frac{3}{4} < t \leq 2$ و بالاخره خط $S = 4t - 2$ را در فاصله $\frac{3}{4} < t \leq 2$ رسم کرد.

توضیح. به این نکته توجه کنیم که در مثالهای بالا فاصله‌ای که تابع در آن معین است تنها از عبارت تحلیلی تابع مشخص نمی‌شود، بلکه با توجه به شرطهای مسأله در نظر گرفته می‌شود. مثلاً در مثال ۱ تابع

$$V = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})$$

در فاصله $(0, 2R)$ معین است، اگرچه عبارت تحلیلی تابع درست است تساوی، برای همه مقادیر x معین است.

مثال ۴. چتر بازی بعد از پرش از هواپیما ، در t_1 ثانیه اول تحت تأثیر نیروی جاذبه و در t_2 ثانیه بعد با سرعت ثانیه‌ای v متر به زمین رسید . طول راهی را که چتر بازی کرده است، به عنوان تابعی از زمان بنویسید؛ لحظه پرش را زمان صفر بگیرید. فاصله معین بودن و فاصله تغییرات تابع را بنویسید. حل. چتر باز در t_1 ثانیه اول تحت تأثیر نیروی جاذبه حرکت کرده است. بنابراین اگر مقاومت هوا را در نظر نگیریم، برای $0 \leq t \leq t_1$ داریم:

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{برای } t_1 < t \leq t_1 + t_2 \quad \text{داریم: } S = S(t_1) + v(t - t_1) \text{ یا } S = \frac{1}{2}gt^2 + v(t - t_1) \text{ به این ترتیب:}$$

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}gt^2 & (0 \leq t \leq t_1) \\ \frac{1}{2}gt_1^2 + v(t - t_1) & (t_1 < t \leq t_1 + t_2) \end{cases}$$

تابع در فاصله $0 \leq t \leq t_1 + t_2$ معین است و در فاصله $0 < S < \frac{1}{2}gt_1^2 + vt_2$ تغییر می‌کند.

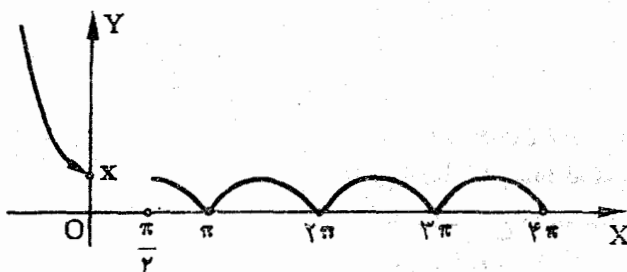
مثال ۵. منحنی نمایش تغییرات این تابع را رسم کنید:

$$y = \begin{cases} 1+x^2 & (x < 0) \\ |\sin x| & (x > \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

حل. برای $x < 0$ ، منحنی عبارتست از شاخه‌ای از یک سهمی که رأس آن

$A(0, 1)$ است (خود این نقطه جزو منحنی نیست). برای $x > \frac{\pi}{2}$ ابتدا منحنی

$\sin x$ را رسم می‌کنیم و سپس آن قسمت از منحنی را که زیر محور طول قرار دارد به قرینه خود نسبت به محور OX تبدیل می‌کنیم (شکل ۲۳).



شکل ۲۳

مثال ۶. منحنی نمایش تغییرات تابع زیر را رسم کنید.

$$y = \begin{cases} \frac{x^2+x}{|x|} & (|x| < 1, x \neq 0) \\ 2 & (x > 1) \end{cases}$$

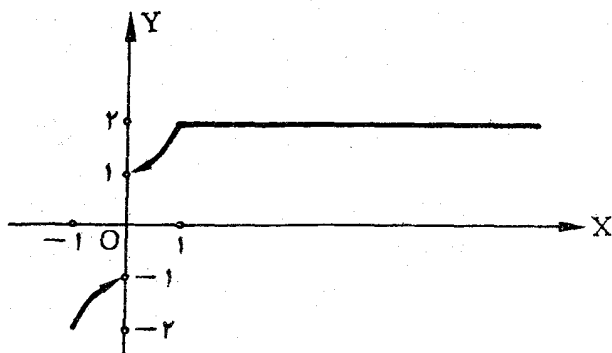
حل. با شرط $0 < x < 1$ داریم: $|x| = -x$ ، بنابراین:

$$y = \frac{x^2+x}{|x|} = \frac{x(x^2+1)}{-x} = -(x^2+1)$$

با شرط $0 < x < 1$ داریم: $|x| = x$ ، بنابراین:

$$y = \frac{x^2+x}{x} = x^2+1$$

منحنی نمایش تغییرات تابع در شکل ۲۴ داده شده است.



شکل ۲۴

۲. فاصله معین بودن و فاصله تغییرات تابع

در هر يك از مثالهای ۷ تا ۱۰ معلوم کنید درجه فاصله ای تابع معین است؟

$$\text{مثال ۷. } y = 3\sqrt{1+x^2} + \sqrt{|x+2|} - 7$$

حل. زیر رادیکال در جمله اول (یعنی $1+x^2$) همیشه مثبت است و بنابراین جمله اول عبارت تابع، به ازای همه مقادیر x معین است. جمله دوم وقتی معین است که داشته باشیم:

$$|x+2| - 7 > 0 \Rightarrow |x+2| > 7$$

و این نامساوی وقتی صحیح است که $x > 5$ یا $x < -9$ باشد.

بنابراین تابع مفروض در دو فاصله $(-\infty, -9]$ و $(5, +\infty)$ معین است.

$$\text{مثال ۸. } y = \sqrt{\frac{8}{|x|} - 1} + \log(x^2 - 1)$$

حل. جمله اول تابع در دو فاصله نیم بسته $(0, 8]$ و $[-8, 0)$ و جمله دوم به ازای $x > 1$ و $x < -1$ معین است. بنابراین تابع مفروض در دو فاصله نیم بسته $(-8, -1)$ و $(1, 8)$ معین است.

$$\text{مثال ۹. } y = \sqrt{|x+5|+1} - \sqrt{10-|x|} + \sin 2x$$

جواب: تابع در فاصله بسته $[-10, 10]$ معین است.

$$\text{مثال ۱۰. } y = \sqrt{|x|-x} + \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$$

جواب: تابع به ازای همه مقادیر x بجز عددهای 1 و -1 معین است. در مثالهای ۱۱ تا ۱۵ معین کنید مقدار تابع در چه فاصله ای تغییر می کند؟

$$\text{مثال ۱۱. } y = \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{4}$$

حل. تابع برای همه مقادیر x معین است. از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned} y &= (\sin^2 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x) - 2\sin^2 x \cos^2 x + \frac{1}{4} = \\ &= \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \sin^2 2x \end{aligned}$$

و چون $0 \leq \sin^2 2x < 1$ ، پس:

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{4} < y < \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} < y < \frac{5}{4}$$

$$\text{مثال ۱۲. } y = \frac{x}{(x+1)(x-2)}$$

حل. تابع به ازای همه مقادیر x بجز عددهای 1 و 2 معین است.

برای پیدا کردن حدود تغییرات تابع، این معادله را نسبت به x حل

می کنیم، بدست می آید:

$$x = \frac{y+1 \pm \sqrt{9y^2+2y+1}}{2y}$$

چون x عددی است حقیقی، باید نامساوی $9y^2+2y+1 \geq 0$ برقرار باشد، ولی این نامساوی به ازای همه مقادیر y صحیح است، بنابراین هر مقدار دلخواه $y \neq 0$ متناظر با مقداری از x است. از صورت اصلی تابع معلوم است که $y=0$ متناظر با $x=0$ است. از اینجا معلوم می شود که حوزه تغییرات تابع عبارتست از همه عددهای حقیقی.

توضیح: فاصله تغییرات مقدار تابع را حوزه تغییرات تابع یا مجموعه مقادیر تابع هم می گویند.

مثال ۱۳. $y = a \sin x + b \cos x$

جواب: $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال ۱۴. $y = 2 + \sin x \cos x \cos 2x$ با شرط $0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}$

جواب: $2 \leq y \leq 2\frac{1}{4}$

مثال ۱۵. $y = \frac{3}{x(x-2)}$

جواب: شبیه مثال ۱۲ عمل کنید: $-\infty < y \leq -3$ و $0 < y < \infty$

۳. صعودی و نزولی بودن تابع

در مثالهای ۱۶ تا ۲۰ فاصله صعودی و نزولی بودن تابع را معین

می کنیم.

مثال ۱۶. $y = x^3$

حل. x_1 و x_2 را دو مقدار دلخواه متغیر می گیریم و فرض می کنیم $x_1 < x_2$.

داریم:

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)$$

با توجه به نامساوی $x_2 - x_1 > 0$ به تعیین علامت عبارت

$$x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2$$

می پردازیم. داریم:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > \sqrt{x_1^2 x_2^2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 > 2|x_1| \cdot |x_2| > |x_1| \cdot |x_1|$$

بنابراین نامساوی $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 > 0$ برای هر علامت x_1 و x_2

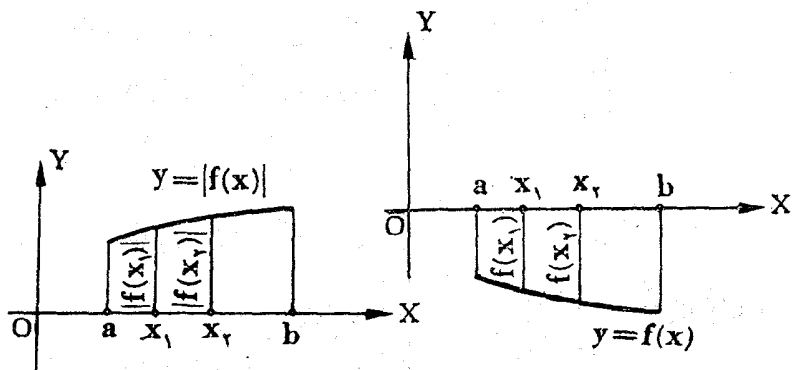
صحیح است. به این ترتیب تابع $y = x^3$ برای همه مقادیر x صعودی است.

مثال ۱۷. $y = |x^2 + 2x - 3|$

حل. قبلاً متذکر می شویم که اگر $f(x) > 0$ باشد، $f(x)$ و $|f(x)|$ باهم

صعودی و با هم نزولی اند. اگر در فاصله ای $f(x)$ منفی باشد، وقتی که در این

فاصله $f(x)$ نزولی است $|f(x)|$ صعودی و وقتی که $f(x)$ صعودی است $|f(x)|$ منفی نزولی خواهد بود. شکلهای ۲۵ و ۲۶ این مطلب را درحالتی که $f(x)$ روشن می کند.



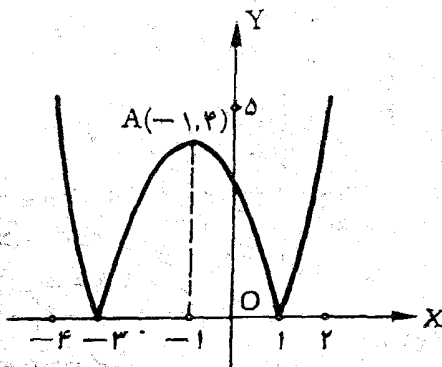
شکل ۲۶

شکل ۲۵

برای حل مسأله، فاصله‌هایی را معین می کنیم که در آنجا:
 $x^2 + 2x - 3 < 0$ و $x^2 + 2x - 3 > 0$ نامساوی اول به ازای
 $x > 1$ و $x < -3$ و نامساوی دوم به ازای $-3 < x < 1$ برقرار است.

حال فاصله‌های صعودی و نزولی تابع زیر را بررسی می کنیم:

$$y_1 = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$$



شکل ۲۷

این تابع به ازای $x < -1$ نزولی و به ازای $x > -1$ صعودی است. ضمناً به ازای $x < -3$ نزولی و مثبت، به ازای $-3 < x < -1$ نزولی و منفی، به ازای $-1 < x < 1$ صعودی و منفی، و بالاخره به ازای $x > 1$ صعودی و مثبت است. بنابراین تابع $y = |x^2 + 2x - 3|$ به ازای $x < -3$ و $-1 < x < 1$ نزولی و به ازای $-3 < x < -1$ و $x > 1$ صعودی است. منحنی نمایش تغییرات این تابع در شکل ۲۷ داده شده است.

مثال ۱۸. $y = \frac{x+2}{2x}$

حل. تابع در همه جا، بجز در نقطه $x = 0$ ، معین است. روشن است که

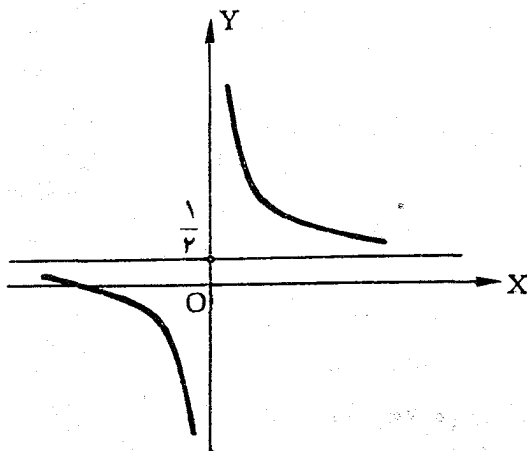
$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$. ابتدا حالت $x < 0$ را در نظر می گیریم. فرض کنیم $x_1 < x_2 < 0$ در این صورت:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} < 0$$

یعنی در حالت $x < 0$ تابع نزولی است.

به همین ترتیب معلوم می شود که در حالت $x > 0$ هم تابع نزولی است.

منحنی نمایش تغییرات تابع در شکل ۲۸ داده شده است.



شکل ۲۸

مثال ۱۹. $y = |x^2|$

جواب: تابع برای $x \leq 0$ نزولی و برای $x > 0$ صعودی است.

مثال ۲۰.
$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}gt^2 & (0 \leq t \leq t_1) \\ \frac{1}{2}gt_1^2 + v(t - t_1) & (t_1 \leq t \leq t_1 + t_2) \end{cases}$$

جواب: تابع در تمام فاصله‌ای که معین است، صعودی است.

مثال ۲۱. آیا تفاضل دو تابع صعودی، یک تابع صعودی است؟

حل. تفاضل دو تابع صعودی ممکن است صعودی نباشد، مثلاً هر یک

از دو تابع $y_1 = x^3$ و $y_2 = 3x$ برای همه مقادیر حقیقی x صعودی هستند؛

در حالیکه تفاضل آنها $y_2 - y_1 = 3x - x^3$ برای همه مقادیر حقیقی x صعودی

نیست. در حالتی هم ممکن است تفاضل دو تابع صعودی، تابعی صعودی باشد.

مثلاً دو تابع $y_1 = 3x$ و $y_2 = 2x$ صعودی هستند؛ تفاضل آنها یعنی تسایع $y_2 - y_1 = x$ هم صعودی است.

۴. بررسی و رسم منحنی نمایش تغییرات تابع

مثال ۲۲. تابع $y = 2^{1+\cos x}$ را بررسی و منحنی نمایش تغییرات

آنها رسم کنید.

حل. ۱) تابع به ازای همه مقادیر حقیقی x معین است.

۲) حوزه تغییرات تابع عبارتست از $1 \leq y \leq 4$.

۳) تابع زوج است، زیرا داریم:

$$y(-x) = 2^{1+\cos(-x)} = 2^{1+\cos x} = y(x)$$

و بنابراین محور عرض محور تقارن منحنی آنست.

۴) تابع متناوب است و کوچکترین دوره تناوب آن برابر است با

2π . بنابراین کافی است منحنی را مثلاً در فاصله $(0, 2\pi)$ رسم کنیم. با توجه

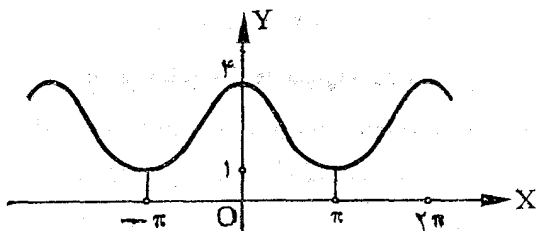
به زوج بودن تابع، می‌توان منحنی را در فاصله $(0, \pi)$ رسم کرد و قرینه آنرا

نسبت به محور عرض بدست آورد تا منحنی در فاصله $(-\pi, \pi)$ بدست آید.

ضمناً متناوب بودن تابع نشان می‌دهد که خطهای $y = k\pi$ محورهای تقارن منحنی هستند.

(۵) کسینوس در فاصله $(0, \pi)$ نزولی و در فاصله $(\pi, 2\pi)$ صعودی است و بنابراین تابع مفروض هم در فاصله اول نزولی و در فاصله دوم صعودی است

(۶) تابع $\cos x$ در نقطه $x = \pi$ می‌نیم نسبتی مساوی ۱- دارد، تابع $y = 2 + \cos x$ هم در همین نقطه می‌نیم نسبتی مساوی ۱ دارد. $\cos x$ در نقطه $x = 0$ ماکزیم نسبتی مساوی ۱ و تابع $2 + \cos x$ در همین نقطه ماکزیم نسبتی مساوی ۳ دارد.



شکل ۲۹

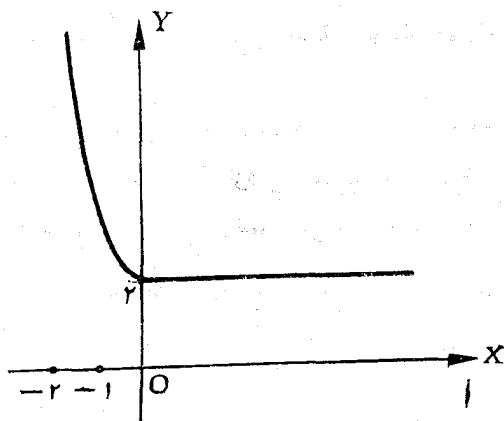
به این ترتیب دیگر رسم منحنی نمایش تغییرات تابع مشکل نیست. این منحنی در شکل ۲۹ داده شده است.

مثال ۲۳: تابع $y = 2 + \frac{|x| - x}{2}$ را بررسی و منحنی نمایش تغییرات آنرا رسم کنید.

حل. تابع برای همه مقادیر حقیقی x معین است. به ازای $x < 0$ داریم: $y = 2 - x + 1$ و به ازای $x \geq 0$ داریم: $y = 2$. برای $x < 0$ تابع نزولی است، زیرا اگر $x_1 < x_2 < 0$ باشد، داریم:

$$y_2 - y_1 = 2(2 - x_2 - 2 + x_1) < 0$$

برای $x \geq 0$ تابع مقداری است ثابت. تابع متصل است و محور طول را قطع نمی‌کند (شکل ۳۰).



شکل ۳۰

بیان مفهوم تابع بر اساس مطالعه نسبتهای دوتایی

در جلد اول روشهای جبر، در فصل مجموعه‌ها، با بعضی مفهومیهای مربوط به این نظریه، مثل زیرمجموعه، اجتماع و اشتراك مجموعه‌ها، نگاشت يك مجموعه بر مجموعه دیگر و غیره آشنا شدیم. در اینجا می‌خواهیم با توجه بیشتر به نگاشت مجموعه‌ها و نسبتهای دوتایی، مفهوم تابع را با دید جدید آن مورد بررسی قرار دهیم.

۵. نسبتهای دوتایی

مفهوم زوج. در ریاضیات مجموعه‌ای که از دو عضو تشکیل شده باشد، مثل مجموعه $\{x, y\}$ با زوج مرتب فرق دارد. اگر عضوهای x و y از مجموعه $\{x, y\}$ با ترتیب معینی در نظر گرفته شود، يك زوج مرتب بدست می‌آید و به شکل (x, y) نشان داده می‌شود.

مثلا جوابهای صحیح معادله $x - y = 2$ که بین عددهای $0 < x < 6$ و $0 < y < 4$ واقع باشند، عبارتست از:

$$\begin{array}{cccc} \left| \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \end{array} \right. & ; & \left| \begin{array}{l} x_2 = 4 \\ y_2 = 2 \end{array} \right. & ; & \left| \begin{array}{l} x_3 = 5 \\ y_3 = 3 \end{array} \right. & ; & \left| \begin{array}{l} x_4 = 6 \\ y_4 = 4 \end{array} \right. \end{array}$$

که اگر بخواهیم آنها را به صورت زوجهای مرتب نشان دهیم، داریم:

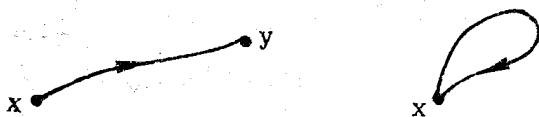
$$(3,1); (4,2); (5,3); (6,4)$$

روشن است که دوزوج $(4,2)$ و $(2,4)$ با یکدیگر فرق دارند، زیرا $x=4$ و $y=2$ جوابی از معادله $x-y=2$ است، در حالیکه $x=2$ و $y=4$ جواب این معادله نیست، یعنی $(2,4) \neq (4,2)$.

زوجهای مرتب (x,y) و (z,u) تنها وقتی برابرند که داشته باشیم: $x=z$ و $y=u$. از اینجا معلوم می‌شود که زوجهای مرتب (x,y) و (y,x) تنها وقتی برابرند که $x=y$ باشد، که در این صورت زوج مرتب (x,x) بدست می‌آید.

اگر (x,y) یک زوج مرتب باشد، x را مختص اول یا عضو اول یا تصویر اول یا طول، و y را مختص دوم یا عضو دوم یا تصویر دوم یا عرض می‌نامیم.

اغلب زوج مرتب (x,y) را به وسیله پیکان نشان می‌دهند؛ عضوهای x و y را نقطه‌هایی از صفحه در نظر می‌گیرند و آنها را به وسیله پیکانی که در جهت x به y باشد بهم وصل می‌کنند (۳۱).



زوج (x,y) شکل ۳۱ زوج (x,x)

حاصلضرب مستقیم مجموعه‌ها Y و X را دومجموعه در نظر می‌گیریم.

تعریف. حاصلضرب مستقیم مجموعه‌های Y و X عبارتست از مجموعه‌ای که از همه زوجهای مرتب (x,y) تشکیل شده باشد، بنحوی که در آنها: $y \in Y$ و $x \in X$. حاصلضرب مستقیم را اینطور می‌نویسند:

$$X \times Y = \{(x,y) | x \in X, y \in Y\}$$

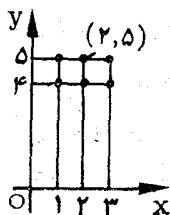
مثال ۱. فرض کنید $X = \{1,2,3\}$ و $Y = \{4,5\}$ ، در این صورت

داریم:

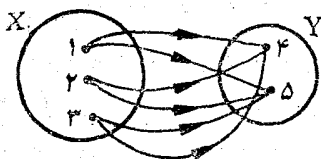
$$X \times Y = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$$

اگر هر زوج مرتب را به وسیله پیکانی نشان دهیم، نمایش پیکانی حاصلضرب

مستقیم بدست می آید (شکل ۳۲).



شکل ۳۳



شکل ۳۲

راه دیگری هم برای نشان دادن حاصلضرب مستقیم وجود دارد: عضوهای مجموعه‌های X و Y را روی دو خط راست عمود بر هم روی صفحه، نشان می‌دهیم، از نقطه‌های x و y که به این ترتیب بدست می‌آید خطهایی موازی دو خط انتخابی می‌کشیم، و نقطه‌های برخورد این خطها را به عنوان زوج مرتب (x, y) در نظر می‌گیریم. این نمایش حاصلضرب مستقیم را نمایش مختصاتی گوئیم (شکل ۳۳).

اگر X و Y دو مجموعه منطبق بر هم باشند، در اینصورت داریم:
 $X \times Y = X \times X$. این حاصلضرب را مربع دکارتی مجموعه X گویند و به X^2 نشان می‌دهند.

مثلا اگر داشته باشیم: $X = \{a, b, c\}$ ، در اینصورت:

$$X^2 = \{(a, a) \text{ و } (a, b) \text{ و } (a, c) \text{ و } (b, a) \text{ و } (b, b) \text{ و } (b, c) \text{ و } (c, a) \text{ و } (c, b) \text{ و } (c, c)\}$$

مثال ۳. اگر N مجموعه

عددهای طبیعی باشد، N^2 مجموعه

زوجهای مرتبی است که جمله‌های

اول و دوم هر يك از آنها عددی

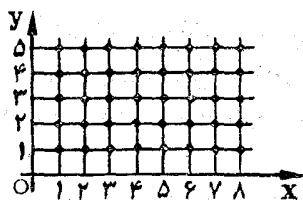
طبیعی باشد. در نمایش مختصاتی،

این زوجها نقطه‌هایی از صفحه محور-

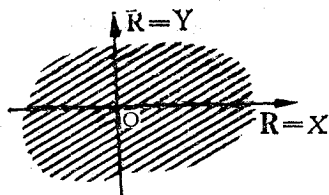
های مختصات را نشان می‌دهند که

دارای مختصات صحیح‌اند و در ربع اول دستگاه محوره‌های مختصات قرار دارند

(شکل ۳۴).



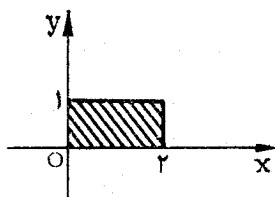
شکل ۳۴



مثال ۳. R را مجموعه

عددهای حقیقی می‌گیریم (محور
عددها). R^2 مجموعه زوجهای مرتبی
است که هریک از دو جمله هر کدام

از آنها عددی حقیقی است. R^2 را صفحه عددی گویند. در شکل ۳۵
نمایش مختصاتی، این زوجها تمام صفحه را بطور کامل می‌پوشانند (شکل ۳۵).



شکل ۳۶

مثال ۴. فرض کنید:

$$X = \{x | 0 \leq x \leq 2\};$$

$$Y = \{y | 0 \leq y \leq 1\}$$

در اینصورت $X \times Y$ عبارتست از

قسمتی از صفحه عددی که در داخل

مستطیل به ضلعهای $x=0$ و $x=2$ و $y=0$ و $y=1$ (شکل ۳۶) قرار
گرفته است.



شکل ۳۷

مثال ۵. يك حلقه دایره‌ای

داده شده است. X را مجموعه نقطه-

های واقع بر پاره خطی از يك شعاع

می‌گیریم که داخل حلقه واقع باشد؛

Y را هم مجموعه نقطه‌های واقع بر

محیط دایره داخلی حلقه فرض می‌کنیم. برای تعیین هر نقطه واقع در داخل

حلقه، کافی است يك نقطه x از مجموعه X و يك نقطه y از مجموعه Y معلوم

باشد: از نقطه x دایره‌ای هم مرکز با دایره‌هایی که حلقه را محدود کرده‌اند

رسم می‌کنیم، از نقطه y هم شعاعی عبور می‌دهیم، نقطه (x, y) از حلقه (محل

برخورد دایره و شعاعی که رسم کرده‌ایم) بدست می‌آید. به این ترتیب حلقه

دایره‌ای را می‌توان به عنوان مجموعه همه زوجهای (x, y) در نظر گرفت

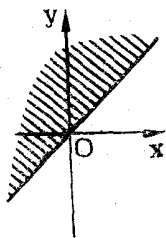
که در آن x نقطه‌ای از پاره خط X ، و y نقطه‌ای از دایره Y است، یعنی

حلقه دایره‌ای عبارتست از حاصلضرب مستقیم پاره خط X در دایره Y (شکل ۳۷).

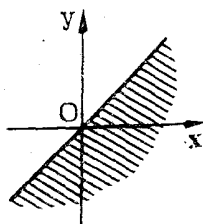
نسبتهای دوتایی. مثال ۱. از مجموعه R^2 ، زیر مجموعه های زیر را جدا می کنیم:

(a) $A_1 \subset R^2$ ، بنحوی که $A_1 = \{(x, y) | x = y\}$. در نمایش

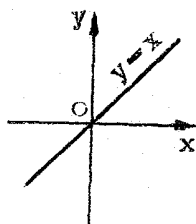
مختصاتی، این نقطه ها بر نیمساز اول و سوم دستگاه محورهای مختصات قرار دارند (شکل ۳۸).



شکل ۴۰



شکل ۳۹



شکل ۳۸

(b) $A_2 \subset R^2$ ، بنحوی که $A_2 = \{(x, y) | x \in R, y \in R, x > y\}$

و این نقطه هایی از صفحه است که زیر خط $y = x$ قرار گرفته اند (شکل ۳۹).

(c) $A_3 \subset R^2$ ، بنحوی که $A_3 = \{(x, y) | x \in R, y \in R, x < y\}$

که عبارتست از نقطه هایی از صفحه که بالای خط $y = x$ قرار گرفته اند (شکل ۴۰).

درحالی که از R^2 زیرمجموعه A_1 را، یعنی زوجهای مرتبی را که برای

آنها $y = x$ ، جدا کرده ایم، درعین حال نسبت تساوی را هم درمجموعه عددهای

حقیقی تعریف کرده ایم: عدد اول زوج به عدد دوم آن نسبت تساوی دارد.

وقتی که از R^2 زیرمجموعه A_2 را، یعنی زوجهای مرتبی را که برای

آنها عدد اول بزرگتر از عدد دوم است، جدا کرده ایم، نسبت «بزرگتر» را در

مجموعه عددهای حقیقی تعریف کرده ایم.

با جدا کردن زیرمجموعه A_3 از R^2 ، یعنی زوجهای مرتبی که برای

آنها عدد اول کوچکتر از عدد دوم است، نسبت «کوچکتر» را درمجموعه عددهای

های حقیقی تعریف کرده ایم.

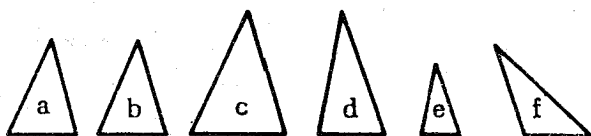
مثال ۲. $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ را مجموعه ای از مثلثها می گیریم

(شکل ۴۱). مثلثهای مجموعه M ممکن است:

(a) مساوی باشند یا نامساوی ؛

(b) متشابه باشند یا غیر متشابه ؛

(c) هم ارز باشند یا بامساحتهاى مختلف.



شکل ۴۱

همه زوجهایى را نام می بریم که دو جمله آنها مثلثهایی مساوی ، متشابه یا

هم ارز باشند؛ مجموعه هایی از زوجهای مرتب بدست می آید:

$$a) A_1 = \{(a,a) \text{ و } (a,b) \text{ و } (b,b) \text{ و } (b,a) \text{ و } (d,d) \text{ و } (e,e) \text{ و } (f,f) \text{ و } (c,c)\} ;$$

$$b) A_2 = \{(a,a) \text{ و } (a,b) \text{ و } (a,c) \text{ و } (b,b) \text{ و } (b,a) \text{ و } (b,c) \text{ و } (c,a) \text{ و } (c,b) \text{ و } (c,c) \text{ و } (d,d) \text{ و } (d,e) \text{ و } (e,d) \text{ و } (e,e) \text{ و } (f,f)\} ;$$

$$c) A_3 = \{(a,a) \text{ و } (a,b) \text{ و } (a,f) \text{ و } (b,b) \text{ و } (b,a) \text{ و } (b,f) \text{ و } (c,c) \text{ و } (d,d) \text{ و } (e,e) \text{ و } (f,a) \text{ و } (f,b) \text{ و } (f,f)\}$$

مثلا زوج (a,b) در مجموعه A_1 به این معناست که مثلث a با مثلث b

برابر است؛ زوج (b,c) در مجموعه A_2 یعنی مثلث b بامثلث c متشابه است؛

زوج (a, f) در مجموعه A_3 نشان می‌دهد که مثلث a با مثلث f هم ارز است. می‌بینیم که نسبت تساوی، نسبت تشابه و نسبت هم‌ارزی بین زوج مثلثهایی از M ، مجموعه‌های A_1, A_2, A_3 را تشکیل می‌دهند که هر کدام از آنها زیرمجموعه‌ای از مربع دکارتی مجموعه M هستند.

در مثالهای ۱، ۲ دیده می‌شود: هر نسبتی را که بین عضوهای مجموعه M وجود داشته باشد، می‌توان به وسیله مجموعه‌ای از زوجهای مرتب بیان کرد، بنحوی که در این مجموعه تنها زوجهایی باشند که نسبت مفروض در مورد آنها صادق است. برعکس، هر زیرمجموعه A از مربع دکارتی M^2 (از مجموعه M)، نسبتی را بین عضوهای مجموعه M تعریف می‌کند.

تعریف. هر زیرمجموعه A از مربع دکارتی M^2 (از مجموعه M)، نسبت دوتایی در مجموعه M نامیده می‌شود.

اگر زوج $(x, y) \in M^2$ متعلق به نسبت A باشد، می‌نویسند: xAy یا $(x, y) \in A$. و اگر زوج (x, y) متعلق به نسبت A نباشد، می‌نویسند: $(x, y) \notin A$

در مورد نسبتهایی که در ریاضیات بیشتر مورد استعمال دارد (بعد از این هر جا از نسبت صحبت می‌کنیم، منظور نسبت دوتایی است)، از علامتهای $=, <, >, \infty, \infty, \perp, \parallel$ و غیره استفاده می‌شود.

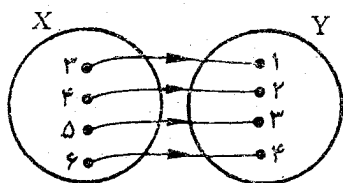
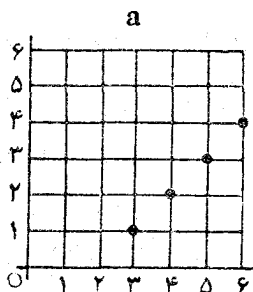
مجموعه جمله‌های اول زوجهای مرتب، حوزه تعریف نسبت نامیده می‌شود و با علامت X نشان می‌دهند؛ مجموعه جمله‌های دوم زوجهای مرتب، حوزه مقادیر نسبت نامیده می‌شود و با علامت Y نشان می‌دهند.

مثلا نسبت « x دو واحد از y بزرگتر است» در مجموعه:

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ به صورت مجموعه زوجهای مرتب:}$$

$$A = \{(3, 1) \text{ و } (4, 2) \text{ و } (5, 3) \text{ و } (6, 4)\}$$

مشخص می‌شود. حوزه تعریف $X = \{3, 4, 5, 6\}$ و حوزه مقادیر:



b
شکل ۴۲

$$Y = \{1, 2, 3, 4\} \text{ است.}$$

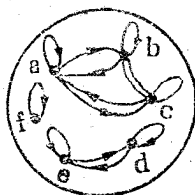
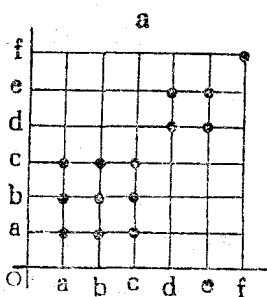
نسبت x دو واحد از y
بزرگتر است « در مجموعه

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

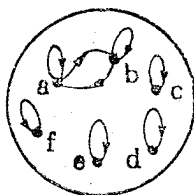
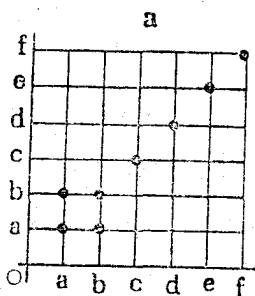
را می‌توان با استفاده از نمایش
مختصاتی (شکل ۴۲-ا) و یا
نمایش پیکانی (شکل ۴۲-ب)
هم نشان داد.

در شکل‌های ۴۳، ۴۴،

و ۴۵ نسبت‌های «تساوی»، «تشابه»

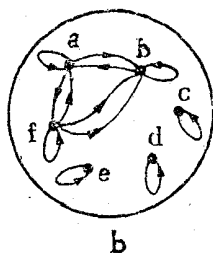
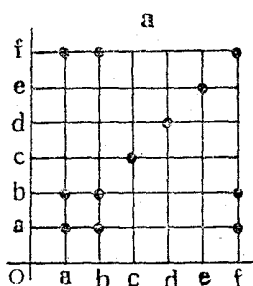


شکل ۴۴



شکل ۴۳

و «هم ارزی» در مجموعه $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ مثلثها (مثال ۲ را ببینید). با نمایش مختصاتی و نمایش پیکانی نشان داده شده است.



شکل ۴۵

نقطه‌هایی که نماینده

عضوهای يك مجموعه هستند، در

دو مجموعه جداگانه نشان داده

نشده است، بهمین مناسبت پیکانها

به صورتی که درشکلهای $b-43$ ،

$b-44$ و $b-45$ مشخص شده

است، درآمده‌اند.

مثالهای دیگری برای

نسبتهای دوتایی: «قابلیت تقسیم»

در مجموعه عدد های صحیح ؛

«تساوی»، «بزرگتر»، «کوچکتر»

در مجموعه عدد های طبیعی ،

مجموعه عددهای صحیح و مجموعه

عددهای گویا؛ «توازی»، «تعامد»، «تقاطع» در مجموعه خطهای راست ؛

«تساوی»، «تشابه»، «هم ارزی» در مجموعه شکلهای هندسی ؛ «هم ارزی» در

مجموعه معادله‌ها؛ «مادر بودن»، «پدر بودن»، «خواهر بودن»، «برادر بودن»

در مجموعه آدمها و غیره .

۶. تابع

دوباره نسبت « x دو واحد بزرگتر از y است» را در مجموعه:

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

در نظر می گیریم، که در آن حوزه تعریف $X = \{3, 4, 5, 6\}$ و حوزه مقادیر

$Y = \{1, 2, 3, 4\}$ است. این نسبت به وسیله مجموعه زوجهای مرتب زیر نشان داده می شود:

$$A = \{(3, 1) \text{ و } (4, 2) \text{ و } (5, 3) \text{ و } (6, 4)\}$$

به این نکته توجه می کنیم که يك عدد طبیعی نمی تواند دو واحد بیشتر از دو عدد طبیعی مختلف باشد، بنابراین در نمایش پیکانی (شکل ۴۲-b) از هر نقطه مجموعه تنها يك پیکان خارج شده است. این مطلب به معنای آنست که در نوشتن نسبت، به عنوان مجموعه ای از زوجهای مرتب، زوجهایی وجود ندارد که جمله اول مشترك و جمله دوم متفاوت داشته باشند؛ در نمایش مختصاتی این نسبت، روی هر خط عمود تنها يك نقطه نشان دار ممکن است وجود داشته باشد (شکل ۴۲-a). نسبتی که به این ترتیب باشد، نسبت تابعی و یا بطور خلاصه تابع نامیده می شود.

تعریف. تابع عبادتست از مجموعه ای از زوجهای مرتب، بنحوی که در بین عضوهای آن نتوان دو عضو پیدا کرده که در جمله اول مشترك باشند.

تابع را به وسیله حرفهای $f, g, r, s, t, \dots$ نشان می دهند.

از آنجا که هر نسبتی را می توان به صورت مجموعه ای از زوجهای مرتب نشان داد، نسبت A تنها و تنها وقتی يك تابع است که در شرط زیر صدق کند:

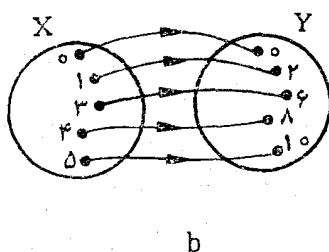
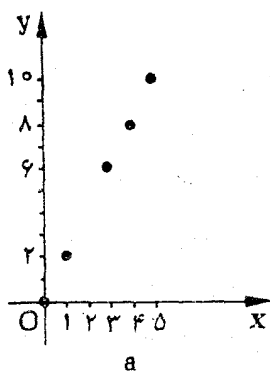
$$\text{اگر } (x, y) \text{ و } (x, u) \in A \Rightarrow y = u$$

$$\text{مثال ۱. نسبت } f = \{(0, 0) \text{ و } (1, 2) \text{ و } (3, 6) \text{ و } (4, 8) \text{ و } (5, 10)\}$$

يك تابع است. حوزه تعریف این تابع $X = \{0, 1, 3, 4, 5\}$ و حوزه مقادیر

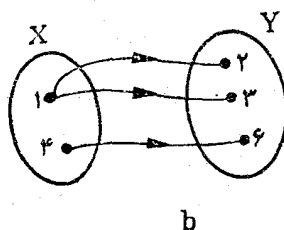
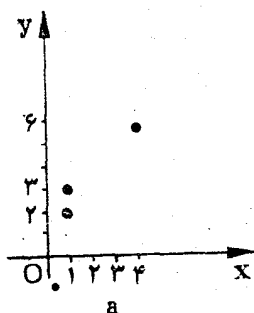
$$\text{آن } Y = \{0, 2, 6, 8, 10\} \text{ است (شکل ۴۶).}$$

$$\text{مثال ۲. نسبت } A = \{(1, 2) \text{ و } (1, 3) \text{ و } (4, 6)\} \text{ تابع نیست، زیرا}$$



شکل ۴۶

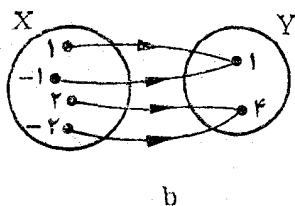
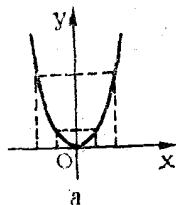
دو عضو مختلف $(1, 2)$ و $(1, 3)$ دارای جمله اول مشترکند (شکل ۴۷).



شکل ۴۷

مثال ۳. نسبت $A = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ یک تابع است، زیرا اگر

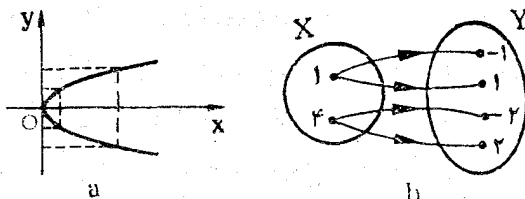
$x = u$ ، در این صورت $x^2 = u^2$ (شکل ۴۸).



شکل ۴۸

مثال ۴. نسبت $A = \{ (x^2, x) \mid x \in \mathbb{R} \}$ تابع نیست، زیرا در آن

زوجهای $(1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2)$ و غیره وجود دارد (شکل ۴۹).



شکل ۴۹

جای کلمه «تابع»، اغلب از کلمه «نگاشت» استفاده می‌شود. اگر

f تابعی با حوزه تعریف X و حوزه مقادیر Y باشد، می‌نویسند:

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{یا} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

و می‌خوانند: تابع از نوع X در Y .

اگر $(x, y) \in f$ ، در این صورت x را آوند (آرگومان) تابع یا متغیر، و y را مقدار تابع در x یا نگاره مختص x در نگاشت f ، یا مختصی که x بوسیله f به آن تبدیل می‌شود، می‌نامند؛ اگر نگاره y از مختص x معلوم باشد، x را اصل و y را مبذل هم گویند. برای بیان y از علامت $y = f(x)$ استفاده می‌کنند.

چون تابع عبارتست از مجموعه زوجهای مرتب، بنابراین برای تعریف تساوی تابعها، معمولاً از تعریف تساوی مجموعه‌ها استفاده می‌کنند. دو تابع f و g وقتی، و تنها وقتی، برابرند که از عضوهای مساوی تشکیل شده باشند، به عبارت دیگر $f = g$ ، تنها وقتی که حوزه تعریف آنها یکی باشد و برای هر مختص دلخواه x از حوزه تعریف داشته باشیم: $f(x) = g(x)$. از اینجا نتیجه می‌شود که تابع وقتی کاملاً معین است که هم حوزه تعریف آن و هم مقدار تابع به ازای

هر مقدار از حوزه تعریف، معلوم باشد. مثلاً تابع $f = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$ به صورت دیگر به این شکل نوشته می‌شود.

(۱) حوزه تعریف $\mathbb{R}$.

(۲) $f(x) = x^2$ برای هر $x \in \mathbb{R}$.

وقتی که تابع به این ترتیب داده می‌شود، حوزه مقادیر آن همیشه معلوم نیست؛ ولی مجموعه‌ای را نشان می‌دهد که حوزه مقادیر را دربر گرفته است. به این مناسبت باید دقیقاً متوجه اختلاف این دو مفهوم بود: «تابع f تابعی است با مقادیر بر روی Y » یا «نگاشت بر روی Y »؛ و «تابع f تابعی است با مقادیر بتوی Y » یا «نگاشت بتوی مجموعه Y ». f عبارتست از نگاشت X بر روی Y ، بشرطی که هر عضو از مجموعه

Y عبارت باشد از مقدار تابع لااقل

به ازای یک مقدار از آوند x (شکل ۵۰). وقتی که حوزه

مقادیر تابع f ، زیر مجموعه‌ای

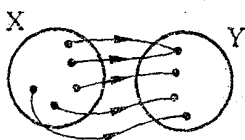
از مجموعه Y باشد، در این

صورت f عبارتست از نگاشت

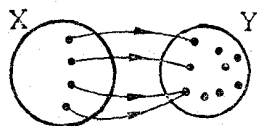
مجموعه X بتوی مجموعه Y

(شکل ۵۱).

مثلاً:



شکل ۵۰



شکل ۵۱

$$f(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$$

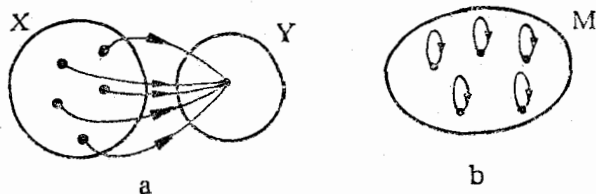
عبارتست از نگاشت $\mathbb{R}$ بر روی $\mathbb{R}$ ، تابع از نوع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ عبارتست از نگاشت مجموعه عددهای حقیقی بر

قدر مطلق آنها، نگاشت $\mathbb{R}$ بر روی $\mathbb{R}^+$.

اگر مجموعه مقادیر تابع تنها یک عضو داشته باشد، تابع را ثابت گویند

(شکل ۵۲-ا).



شکل ۵۲

اگر هر عضو مجموعه X ضمن نگاشت f بخودش منجر شود، نگاشت (تابع) را اتحادی گویند (شکل ۵۲ - b).

به عنوان نمونه‌ای از تابع ثابت Y می‌توان از تابع $x \in R, f(x) = 2$ و به عنوان تابع اتحادی از تابع $x \in R, f(x) = x$ نام برد.

تابع يك ارزشی

تعریف. نگاشت مجموعه X در توی مجموعه Y را يك ارزشی گویند، بشرطی که عضوهای مختلف مجموعه X متناظر با عضوهای مختلف مجموعه Y باشد، یعنی از $x_1 \neq x_2$ نتیجه شود $f(x_1) \neq f(x_2)$ (شکل ۵۳).

مثال ۱. $x \in R, y = 2x - 1$ تابعی است يك ارزشی از نوع $R \rightarrow R$. وقتی که f نگاشت يك ارزشی مجموعه X بر روی مجموعه Y باشد، گویند f بین مجموعه‌های X و Y تناظر يك به يك به وجود آورده است.

مثال ۲. نگاشت f مجموعه X بلیطهای فروخته شده بر روی مجموعه Y صندلیهایی که در سالن سینما اشغال شده، يك نگاشت يك ارزشی در يك تناظر يك به يك بین X و Y است؛ اگر Y_1 مجموعه همه صندلیهای سالن سینما باشد و همه آنها اشغال نشده باشند، در اینصورت f يك نگاشت يك ارزشی در توی Y_1 است.

مثال ۳. نگاشت f مجموعه Q همه عددهای گویا در توی مجموعه M همه نقطه‌های محور I يك نگاشت يك ارزشی Q در توی M است.

مثال ۴. تصویر مرکزی محیط مثلث متساوی الاضلاع بر روی محیط دایره محیطی آن، يك نگاشت يك ارزشی نقطه‌های محیط مثلث بر روی مجموعه

نقطه‌های دایره محیطی در تناظر يك به يك است.

مثال ۵. نگاشت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ با قانون $f(x) = x^2$ يك ارزشی نیست، زیرا عددهای مختلف x و $-x$ منجر به يك عدد $x^2 = (-x)^2$ می‌شود.

تابع معکوس f را تابعی و مثلاً $f = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$ می‌گیریم. جای دو مختص را در تابع f باهم عوض می‌کنیم، روشن است که در این صورت به نسبت: $g = \{(x^2, x) | x \in \mathbb{R}\}$ می‌رسیم که تابع نیست. نسبت g وقتی و تنها وقتی تابع است که، اگر داشته باشیم:

$$(y, x) \text{ و } (y, z) \in g$$

نتیجه بشود: $x = z$. این مطلب برای تابع f به این معناست که اگر داشته باشیم:

$$(x, y) \text{ و } (z, y) \in f$$

باید داشته باشیم: $x = z$ ، یعنی f باید تابعی يك ارزشی باشد.

تعریف. اگر تابع f يك ارزشی باشد، در این صورت تابعی که از f با عوض کردن جای مختصات تابع f بدست می‌آید، تابع معکوس f نامیده می‌شود و به صورت f^{-1} نشان داده می‌شود.

از آنجا که نقطه‌های با مختصات (x, y) و (y, x) در صفحه مجورهای مختصات نسبت به نیمساز ربعی اول و سوم قرینه یکدیگرند، بنابراین منحنی نمایش تغییرات تابع f^{-1} از قرینه منحنی نمایش تغییرات تابع f نسبت به نیمساز ربعی اول و سوم بدست می‌آید.

مثال ۱. $f(x) = x - 2$ و $x \in \{3, 4, 5, 6\}$. در این صورت:

$$Y = \{1, 2, 3, 4\}, \text{ یعنی:}$$

$$f = \{(3, 1) \text{ و } (4, 2) \text{ و } (5, 3) \text{ و } (6, 4)\} \text{ و}$$

$$f^{-1} = \{(1, 3) \text{ و } (2, 4) \text{ و } (3, 5) \text{ و } (4, 6)\}$$

مثال ۲. نسبت $f = \{(x, \sqrt{x}) | x \in \mathbb{R}\}$ ، يك تابع يك ارزشی با

حوزه مقادیر $[0, \infty)$ است، معکوس آن تابع $f^{-1} = \{(\sqrt{x}, x) | x \in \mathbb{R}\}$

است با حوزه تعریف $[0, \infty)$ و حوزه مقادیر $[0, \infty)$.
 برای اینکه در این تابع معکوس، حوزه تعریف و حوزه تغییرات مشخص باشد
 فرض می کنیم $\sqrt{x} = t$ ، در اینصورت $x = t^2$ و داریم:

$$f^{-1} = \left\{ (\sqrt{x}, x) \mid x \in \mathbb{R}^+ \right\} = \left\{ (t, t^2) \mid t \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

از آنجا که انتخاب نوع حرف برای متغیرها اهمیتی ندارد، می توان گفت که
 تابع f^{-1} در مجموعه عددهای حقیقی غیر منفی $\mathbb{R}^+$ معین می شود با مقادیری
 در $\mathbb{R}^+$ و $f^{-1}(x) = x^2$.

۷. بعضی نکته ها درباره مشتق

مشتق تابعهای معکوس مثلثاتی. فرض کنید که بخواهیم مشتق تابع
 $y = \text{Arcsin } x$ را پیدا کنیم؛ داریم:

$$y = \text{Arcsin } x \Rightarrow x = \sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

از دوطرف را بطله اخیر نسبت به متغیر x مشتق می گیریم، بدست می آید:

$$1 = y' \cdot \cos y \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$\cos y$ را به اینجهت مساوی $\sqrt{1 - \sin^2 y}$ (و نه $-\sqrt{1 - \sin^2 y}$) گرفتیم
 که y (یعنی $\text{Arcsin } x$) در فاصله $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ تغییر می کند و در این
 فاصله هم $\cos y$ همیشه مثبت است.

به همین ترتیب می توان مشتق سایر تابعهای معکوس مثلثاتی را بدست آورد:

$y = \text{Arcsin } x$	$y = \text{Arccos } x$	$y = \text{Arctg } x$
$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \text{Arccotg } x$	$y = \text{Arcsec } x$	$y = \text{Arccosec } x$
$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$y' = \frac{ x }{x^2 \sqrt{x^2-1}}$	$y' = -\frac{ x }{x^2 \sqrt{x^2-1}}$

مشتق و تابع ناپيوسته. مشتق تنها در نقطه ای از تابع معنا دارد که
 تابع در آن نقطه پیوسته باشد. بخصوص اگر تابعی در تمام نقطه های خود ناپيوسته

باشد، مشتق برای آن بی معنا می شود.

مشتق تابع يك متغیر، از نظر هندسی به معنای ضریب زاویه مماس بر منحنی آن تابع است و در نقطه ای که تابع پیوسته نیست، مماس بر منحنی و در نتیجه مشتق تابع مفهومی ندارد.

مثلا تابع $y = \sqrt{\log \cos x}$ را در نظر بگیرید. برای اینکه y حقیقی

باشد، باید داشته باشیم: $\log \cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq 1$

و چون $\cos x$ برای مقادیر حقیقی x نمی تواند بزرگتر از واحد باشد، تنها $\cos x = 1$ یا $x = 2k\pi$ (عددی است صحیح k) قابل قبول است. به این ترتیب تابع مفروض در تمام نقطه های خود ناپیوسته است و مشتق برای آن معنا ندارد (این تابع روی دستگاه محورهای مختصات نقطه های جدا از هم را روی محور طول مشخص می کند که فاصله هر دو نقطه مجاور آن مساوی 2π می باشد).

همچنین برای تابع $y = x!$ مشتق معنا ندارد و یا برای تابع $y = E(x)$ (تابع قسمت صحیح x) برای مقادیر صحیح x مشتق بی معنا می شود.

مشتق تابعهای مثلثاتی. برای اینکه مشتق تابع $y = \sin x$ را بدست آوریم به متغیر x نمو Δx را می دهیم، در نتیجه برای y نمو Δy بدست می آید:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \quad \text{و از آنجا:}$$

می دانیم که مشتق تابع y عبارتست از $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، از طرف

دیگر به شرطی که قوس بر حسب رادیان باشد، داریم:

(۱) نسبت $\frac{m}{n}$ وقتی معنا دارد که m و n بایک واحد بیان شده باشند.

در نسبت $\sin a, \frac{\sin a}{a}$ با واحد شعاع دایره معین می شود (وقتی که می گوئیم

مثلا $\sin \frac{\pi}{6}$ برابر است با $\frac{1}{2}$ ، به این معناست که $\sin \frac{\pi}{6}$ برابر است با $\frac{1}{2}$ شعاع

دایره)؛ بنابراین باید هم با واحد شعاع دایره بیان شود، یعنی با واحد رادیان.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a}{a} = 1$$

و از آنجا:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \right] = \cos x$$

می‌بینیم برای تابع $y = \sin x$ داریم: $y' = \cos x$. ولی این به شرطی است که x با واحد رادیان بیان شده باشد. بنابراین در مشتق تابعهای مثلثاتی باید همیشه واحد قوس را رادیان در نظر گرفت تا بتوان از رابطه‌های مشتق استفاده نمود.

مثال ۱. مطلوبست مشتق $y = \sin x^\circ$.

حل. متغیر با واحد درجه بیان شده است، آنرا به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$x^\circ = \frac{\pi}{180} x \text{ (رادیان)} ; y = \sin\left(\frac{\pi}{180} x\right)$$

و از آنجا:

$$y' = \frac{\pi}{180} \cos\left(\frac{\pi}{180} x\right) = \frac{\pi}{180} \cos x^\circ$$

مثال ۲. مطلوبست مشتق $y = \tan x^\circ$.

حل. داریم:

$$\tan x^\circ = \frac{\pi}{200} x \text{ (رادیان)}$$

و بنابراین داریم:

$$y' = \frac{\pi}{200} \left[1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{200} x\right) \right] = \frac{\pi}{200} (1 + \tan^2 x^\circ)$$

تشخیص متغیر. مثال ۳. مطلوبست مشتق تابع $y = x^3$ ، نسبت به متغیر x^3

حل. $x^3 = t$ می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$y = (x^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{t} ;$$

$$y'_t = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} = \frac{1}{3x^2}$$

مثال ۴. مشتق تابع $y = \sqrt{1-x^2}$ را نسبت به متغیر $\text{Arcsin } x$ پیدا کنید.

حل. $x = \sin t$ ($-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) می گیریم، در اینصورت داریم:

$$\begin{cases} t = \text{Arcsin } x, \\ y = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t \end{cases}$$

$$y'_t = -\sin t \quad \text{و از آنجا:}$$

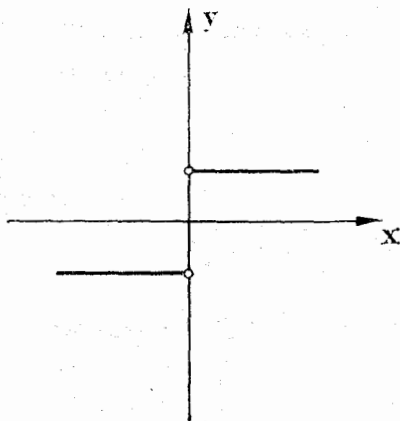
$$y'_{\text{Arcsin } x} = -\sin(\text{Arcsin } x) = -x \quad \text{یعنی:}$$

۸- حد چپ وحد راست - پیوستگی تابع

مثال ۱. حد $y = \frac{|x|}{x}$ را وقتی که x بسمت صفر میل کند، پیدا کنید.

حل. y برای $x = 0$ معنا ندارد. از طرف دیگر معلوم است که:

$$y = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ +1 & (x > 0) \end{cases}$$



به این ترتیب روشن است که اگر x از طرف مقادیر منفی بسمت صفر میل کند، y بسمت -1 و اگر x از طرف مقادیر مثبت بسمت صفر میل کند، y بسمت $+1$ میل می کند. گویند -1 حد چپ و $+1$ حد راست y است، وقتی که x بسمت صفر میل کند. (شکل

شکل ۵۴

(۵۴).

اگر بطور کلی حد چپ وحد راست y ، وقتی که x بسمت a میل می کند، متفاوت باشند، گویند که تابع y در نقطه $x = a$ ناپیوسته است.

تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ وقتی پیوسته است که اولاً حد چپ و حد راست تابع در این نقطه یکی باشد. ثانیاً این مقدار مساوی $f(a)$ شود. مثال ۲. حد تابع $y=\frac{x^2-x}{x^2+x}$ را، وقتی که x بسمت صفر میل کند، پیدا کنید.

حل. تابع به ازای $x=0$ بی معناست، ولی بسادگی معلوم می شود که وقتی x بسمت صفر میل کند، حد چپ و حد راست تابع برابر ۱- می شود، بنابراین با آنکه حد چپ و حد راست تابع در نقطه $x=0$ یکی است، تابع در نقطه $x=0$ ناپیوسته است (زیرا $f(0)$ معین نیست). توضیح. اگر این تابع را به این صورت می گرفتیم:

$$y = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2+x} & (x \neq 0) \\ -1 & (x = 0) \end{cases}$$

در نقطه $x=0$ پیوسته می شد.

اگر حد چپ و حد راست $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ یکی باشد و $f(a)$ را، که نامعین است، مساوی همان مقدار فرض کنیم (که در این صورت گویند اصل ادامه پیوستگی را پذیرفته ایم)، تابع در نقطه $x=a$ پیوسته می شود. برای تابع مثال ۱، پذیرفتن اصل ادامه پیوستگی مفهومی ندارد و با هیچ شرطی در نقطه $x=0$ پیوسته نمی شود.

تمرین

۷۲. تابع $y=f(x)$ با این شرط داده شده است: برای هر مقدار حقیقی x ، مقدار $f(x)$ برابر است با فاصله x تا نزدیکترین عدد صحیح مثبت به آن. نمایش تغییرات این تابع را در محورهای مختصات قائم رسم کنید.

۷۳. این معادله را، بدون استفاده از مجذور کردن دو طرف آن، حل کنید:

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3x} - \sqrt{6}}{\sqrt{2x+6}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$$

۷۲. تابع $f(x)$ برای همه مقادیر حقیقی x معین و حقیقی است و ضمناً در شرط زیر صدق می‌کند:

$$f(x+a) = \frac{1}{4} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$$

که در آن a عبارتست از عدد دلخواهی مخالف صفر.

اولاً ثابت کنید تابع $f(x)$ متناوب است، یعنی عددی مانند $b \neq 0$ وجود دارد بنحوی که برای همه مقادیر x داشته باشیم $f(x+b) = f(x)$. ثانیاً نمونه‌ای از تابع $f(x)$ را که غیر از صفر باشد به‌ازای $a=1$ پیدا کنید.

۷۵. ثابت کنید معادله

$$x^3 + x^2 + x = 1$$

اولاً بیش از یک ریشه حقیقی ندارد. ثانیاً این ریشه حقیقی در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{1}{2} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۷۶. تابع $g(x)$ را عکس تابع $f(x)$ گویند، وقتی که اولاً در همان فاصله‌ای که $f(x)$ معین است، $g(x)$ هم معین باشد، ثانیاً برای هر مقدار x (افاصله معین بودن $g(x)$) داشته باشیم:

$$f(g(x)) = x$$

سه تابع معکوس برای $f(x) = x^2$ پیدا کنید.

۷۷. تابع معکوس تابع زیر را پیدا کنید:

$$y = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

۷۸. تابع معکوس این تابع را بدست آورید:

$$y = \arccos x^2$$

۷۹. تابع $f(x)$ به‌این ترتیب مشخص شده است:

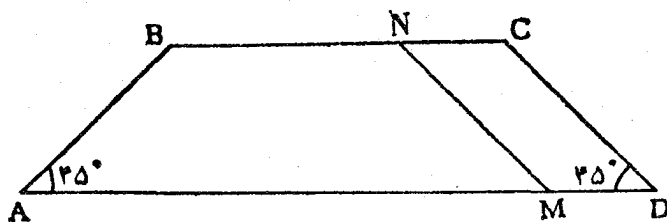
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & (x < 2) \\ -x + 4 & (x > 2) \end{cases}$$

تابع معکوس $f(x)$ را پیدا کنید. ثابت کنید که معادله $f(x) = g(x)$ سه جواب حقیقی دارد. $g(x)$ را تابع معکوس $f(x)$ گرفته ایم.

۸۰. مقدار تابع $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3}$ را به ازای $x = ۱۳۸۵۶۷۱/۲۱۵$ تقریب پیدا کنید.

۸۱. مقدار تابع $y = \frac{2x}{1+x^2}$ را به ازای $x = ۰/۰۰۱۵۶۹۴$ تقریب پیدا کنید.

۸۲. دوزنقه متساوی الساقین ABCD به ارتفاع مساوی واحد مفروض است. قاعده بزرگتر دوزنقه مساوی ۴ و زاویه بین هر ساق با قاعده بزرگتر مساوی ۴۵ درجه است (شکل ۵۵). در این دوزنقه خط MN را موازی CD رسم می کنیم و فرض می کنیم $AM = x$. مساحت قسمتی از دوزنقه را که به وسیله این خط جدا می شود (قسمتی که طرف ساق AB قرار دارد) مساوی y می گیریم. روشن است که y تابعی است از x و x هم در فاصله [۰ و ۴] تغییر می کند. این تابع را بطریق تحلیلی بنویسید.



شکل ۵۵

در تمرینهای از ۸۳ تا ۸۵ معلوم کنید، تابع مورد نظر در چه فاصله ای از متغیر x معین است؟

$$y = \log[\sin(\log x)] \quad .۸۳$$

$$y = \operatorname{Arccos} \sqrt{3 - 2x - x^2} \quad .۸۴$$

$$y = (|x| - x) \sqrt{-\sin^2 \pi x} \quad .۸۵$$

۸۶. اگر تابع $y=f(u)$ در فاصله $0 < u < 1$ معین باشد، هریک از تابعهای زیر درجه فاصله‌ای معین‌اند:

a) $f(x^2)$ و b) $f(\sin x)$ و c) $f(\ln x)$ و d) $f\left(\frac{E(x)}{x}\right)$

۸۷. اگر داشته باشیم:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (|x| \leq 1) \\ 1 & (|x| > 1) \end{cases} ; \quad \varphi(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & (|x| \leq 2) \\ -1 & (|x| > 2) \end{cases}$$

تابع $f[\varphi(x)]$ را پیدا کنید.

۸۸. این نامعادله را حل کنید:

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 4x - 32) \geq \log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 8x - 20)$$

۸۹. با شرط $a \neq 1$ و $a > 0$ ثابت کنید تابع:

$$f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

نسبت به متغیر x فرد است.

۹۰. ثابت کنید مجموع دو تابع زوج، تابعی است زوج.

۹۱. فرض می‌کنیم $f(x)$ در فاصله‌ای که نسبت به صفر متقارن است، معین

باشد. ثابت کنید:

(a) تابع $F_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ زوج است.

(b) تابع $F_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ فرد است.

۹۲. ثابت کنید که تابع $y = \sin x^2$ متناوب نیست.

(۱) برای $E(x)$ یا $[x]$ (بخوانید: قسمت صحیح x): اگر $k \leq x < k+1$

باشد، داریم: $E(x) = k$ ، مثلاً:

$$E(\sqrt{2}) = 1 \text{ و } E\left(\frac{3}{4}\right) = 0, \quad E\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

۹۳. تابع $f(x)$ دارای دوره تناوب $T=2$ است و در فاصله $[0, 2)$ با رابطه $f(x) = x^2 - 1$ بیان می‌شود.

(a) رابطه تحلیلی تابع را در فاصله $[2k, 2k+2)$ بنویسید (k عددی است صحیح).

(b) مطلوب است $f(\pi)$ و $f(-\sqrt{2})$ ، $f(\frac{15}{4})$ ، $f(7)$.

۹۴. معلوم کنید که تابع $y = (x^2 + 4x + 6) \ln(x^2 + 4x + 6)$ در چه فاصله‌ای نزولی و در چه فاصله‌ای صعودی است.

۹۵. کوچکترین دوره تناوب تابع $f(x) = \{x\} = x - E(x)$ را پیدا کنید.

۹۶. مطلوب است محاسبه $f'(1)$ به شرطی که داشته باشیم:

$$f(x) = x + (x-1) \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

مشتق هریک از تابعهای زیر را بدست آورید:

$$y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x) \quad ۹۷$$

$$y = \sin[\sin(\sin x)] \quad ۹۸$$

$$y = \sin[\cos^2(\operatorname{tg}^2 x)] \quad ۹۹$$

$$y = \sqrt[3]{\cotg^2 x} - \sqrt[3]{\cotg^4 x} \quad ۱۰۰$$

$$y = \operatorname{Arctg}\left(\frac{x^2}{a}\right) \quad ۱۰۱$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arccotg}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) \quad ۱۰۲$$

$$y = \sqrt{x} - \operatorname{Arctg} \sqrt{x} \quad ۱۰۳$$

$$y = \operatorname{Arccos} \frac{1-x}{\sqrt{2}} \quad .104$$

$$y = x \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{Arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} \quad .105$$

$$y = \operatorname{Arcsin}(\sin x - \cos x) \quad .106$$

$$y = \operatorname{Arccos}(\cos^2 x) \quad .107$$

$$y = \operatorname{Arctg} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right) \quad .108$$

$$y = \operatorname{Arcsin} \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad .109$$

.110 با شرط $a > b > 0$

$$y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{Arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$$

$$y = \frac{1}{\operatorname{Arccos}(x^2)} \quad .111$$

$$y = \operatorname{Arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{Arctg}(x^3) \quad .112$$

$$y = \operatorname{Arcsin}(\sin x^2) + \operatorname{Arccos}(\cos x^2) \quad .113$$

$$y = x \cdot |x| \quad .115 \quad y = |x| \quad .114$$

$$y = (x-1)^2 \cdot |(x+1)^2| \quad .117 \quad y = |\sin^2 x| \quad .116$$

$$y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x) \quad .119 \quad y = f(x^2) \quad .118$$

$$y = x \cdot f\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \quad .121 \quad y = fff(x) \quad .120$$

.122 مطلوبست محاسبه $f'(0)$ ، به شرطی که داشته باشیم:

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-1000)$$

.123 منحنی نمایش تغییرات $y = x + \sqrt[3]{\sin x}$ در چه نقطه‌هایی مماس

قائم دارد؟ این منحنی را رسم کنید.

مطلوبست y'_x به شرطی که داشته باشیم:

$$\left| \begin{array}{l} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{1 - \sqrt{t}} \\ y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right.$$

$$x^2 + 2xy - y^2 = 2x$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$$

۱۳۰. اگر $y = \sqrt{x}$ و $x > 0$ باشد، مطلوبست:

$$y'_{\sin x} \text{ و } y'_{x^2}, y'_{\sqrt{x}}, y'_x$$

۱۳۱. منحنی‌های $y = \sin x$ و $y = \cos x$ تحت چه زاویه‌ای یکدیگر

را قطع می‌کنند؟

۱۳۲. ثابت کنید طول قطعه مماس بر منحنی:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^2}{y^2} = a^2$$

و محدود به محورهای مختصات، مقداری است ثابت.

۱۳۳. با چه شرطی منحنی تابع $y = x^2 + px + q$ بر محور Ox

مماس است؟

۱۳۴. ثابت کنید که تابع $y = a \cos x + b \sin x$ و a و b مقادیری

ثابت‌اند)، در معادله $y'' + y = 0$ صدق می‌کند.

۱۳۵. ثابت کنید تابع $y = \sqrt{\frac{1}{\cos 2x}}$ در معادله $y + y'' = 3y^5$

صدق می‌کند.

۱۳۶. ثابت کنید تابع $y = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$ در معادله زیر صدق

می‌کند:

$$(x^2 - 1)y'' + xy' - n^2y = 0$$

۱۳۷. در مورد تابع $y = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}$ مقدار عبارت :

$$\frac{2y'^2 - yy''}{y^3} \text{ را محاسبه کنید.}$$

۱۳۸. معادله‌های قائمه‌ای که از نقطه $M(2, -2)$ بر منحنی $y = \frac{x-1}{x+1}$

رسم می‌شود بنویسید.

۱۳۹. ثابت کنید بین مشتق‌های اول و دوم تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + ax + b}}$

رابطه زیر برقرار است:

$$yy'' - 3y'^2 + y^4 = 0$$

۱۴۰. مطلوب‌ست کثیرال جمله $f(x)$ ، بشرطی که داشته باشیم:

$$f[f'(x)] = 27x^6 - 27x^4 + 6x^2 + 2$$

۱۴۱. خانواده منحنی‌های $y = x^n$ (n عددی است صحیح و مخالف

صفر) مفروض است. در نقطه به طول a بر هریک از این منحنی‌ها مماسی رسم می‌کنیم.

ثابت کنید دنباله‌ای که از طول‌های نقطه‌های برخورد این مماسها با محور Ox بدست می‌آید، محدود و غیر یکنوا است و حدی مساوی a دارد.

مقدار هریک از عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)\dots(x^n+1)}{[(nx)^n + 1]^{\frac{n+1}{2}}}. \quad ۱۴۲$$

(۱) یعنی بطور منظم (تنها صعودی یا تنها نزولی) بسمت حد خود میل نمی‌کند.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} = 143$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{20} - 2x + 1} = 144$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} = 145$$

146

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \dots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \dots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right] = 147$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2} = 148$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2} - \frac{n}{4} \right) = 149$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 4^2 + 7^2 + \dots + (3n-2)^2}{[1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2)]^2} = 150$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = 151$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = 152$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + \sqrt[3]{x^3}} = 153$$

۱۵۴. با فرض صحیح بودن m و n :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$$

۱۵۵. با فرض صحیح بودن m و n :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$$

۱۵۶. اگر داشته باشیم:

$$P(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

و m عددی صحیح باشد، ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}} \right) = 157$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) = 158$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right\} = 159$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[2]{x^2 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x} \right) = 160$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \right) = 161$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} - x \right] = 162$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x} = 163$$

(n عددی است صحیح).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n + (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x} = 164$$

(n عددی است صحیح).

۱۶۵. مطلوبست محاسبه مقادیر a و b به شرطی که داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$$

۱۶۶. مطلوبست محاسبه مقادیر a_1, b_1 و a_2, b_2 اگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1 x - b_1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_2 x - b_2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = 167 \quad \text{اگر } m \text{ و } n \text{ عددهایی صحیح باشند، مطلوبست}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2} = 168$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px} = 169$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{tg x}{tg(\frac{\pi}{4} - x)} = 170$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)tg \frac{\pi x}{2} = 171$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - x \sin(a+x) + \sin a}{x^2} = 172$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cotg(a+x) - x \cotg(a+x) + \cotg a}{x^2} = 173$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) \sin(a+x) - \sin^2 a}{x} = 174$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+tg x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^2} = 175$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} = 176$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})} = 178 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = 177$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos^2 x} \sqrt{\cos^2 x}}{x^2} = 179$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 180$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) = 181$$

۱۸۲. اگر داشته باشیم:

$$x_0 = 1; \quad x_n = \frac{1}{1+x_{n-1}} \quad (n=1, 2, \dots)$$

مطلوبست $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{د.}}$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{د.}} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^n})] \quad .183$$

(با شرط $|x| < 1$)

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{د.}} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^n} \right) \quad .184$$

$$\xrightarrow[x \rightarrow 0]{\text{د.}} \frac{3 \operatorname{tg}^4 x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin^4 x - 12 \sin x} \quad .185$$

$$\xrightarrow[x \rightarrow \frac{\pi}{4}]{\text{د.}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^4 x - 1} \quad .186$$

$$\xrightarrow[x \rightarrow 0]{\text{د.}} \frac{\operatorname{Arcsin} 2x - 2 \operatorname{Arcsin} x}{x^3} \quad .187$$

$$\xrightarrow[x \rightarrow 0]{\text{د.}} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} \quad .188$$

.189

$$\xrightarrow[x \rightarrow 0]{\text{د.}} \frac{1}{x \sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{x}{b}} \right)$$

$$\xrightarrow[x \rightarrow 0]{\text{د.}} \left(\cotg x - \frac{1}{x} \right) \quad .190$$

۱۹۱. دنباله $\{a_n\}$ با شرطهای $a_1 = 0$ و $a_{n+1} = \frac{1}{r}(b + a_n^2)$

($0 \leq b \leq 1$) معین شده است. ثابت کنید که این دنباله متقارب است، یعنی اگر $n \rightarrow \infty$

برای a_n حدی بدست می آید. این حد را پیدا کنید.

$$۱۹۲. \text{مطلوبست} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^{2m} - 1}{x^{2n} - 1}} \quad \text{د.د. } nm \text{ عددهایی صحیح اند}$$

$$\text{و ضمناً } mn > 0$$

نمایش تغییرات هریک از تابعهای زیر را در دستگاه محوذهای قائم رسم کنید:

$$۱۹۳. y = x + |x - ۲| \quad ۱۹۴. y = x|x| - ۲x$$

$$۱۹۵. y = \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} x) \quad ۱۹۶. y = ۲ \frac{|\log_1 x|}{\frac{1}{2}}$$

$$۱۹۷. y = |x - ۱| - ۲|x - ۲| - ۳|x - ۳| - ۴$$

$$۱۹۸. y = \operatorname{Arcsin}(\sin x) \quad ۱۹۹. y = \frac{x + ۱}{|x - ۱|}$$

$$۲۰۰. y = \frac{|x + ۱|}{x - ۱} \quad ۲۰۱. y = \left| \frac{x + ۱}{x - ۱} \right|$$

$$۲۰۲. y = E(x) \quad ۲۰۳. y = x - E(x)$$

$$۲۰۴. y = \sqrt{\log \cos x} \quad ۲۰۵. y = \pm x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$۲۰۶. y = \pm x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad ۲۰۷. y = \sqrt{x^2 - x^2}$$

$$۲۰۸. y = \sqrt{x^2 - x^2} \quad ۲۰۹. y = \sqrt{x^2 - x^2 - x + ۱}$$

$$۲۱۰. y = \frac{x^2 - ۷x + ۱۲}{x^2 - ۸x + ۱۲} + \frac{x^2 + ۸x + ۱۲}{x^2 + ۷x + ۱۲}$$

$$۲۱۱. y = \frac{۹x^2 + ۲۵x + ۱۶}{x} + \frac{x}{۹x^2 + ۲۵x + ۱۶}$$

$$(y-x)^2 - 4(x^2 + 4) = 0 \quad .212$$

$$y = \frac{(x-1)^2}{2(x+1)^2} \quad .213$$

$$y = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2} \quad .214$$

$$y = \operatorname{Arccotg} \frac{1}{x} \quad .216 \quad y = \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \quad .215$$

$$y = \operatorname{Arcsin}(\cos x) \quad .217$$

$$y = \operatorname{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad .218$$

$$y = x \cdot \operatorname{Arccotg} x \quad .220 \quad y = x - 2 \operatorname{Arctg} x \quad .219$$

$$|y| + |x| = 1 \quad .222 \quad y = \left| |x| - 1 \right| \quad .221$$

$$y = (1 + |x|)(2 - |x|) \quad .224 \quad |y| = x^2 - 2x - 3 \quad .223$$

$$y = \sqrt{2(x + |x - 2|)} \quad .226 \quad y = \frac{x^2 - x^2}{2|x - 1|} \quad .225$$

$$y = |\sin x| + \sin |x| \quad .227$$

$$(x + |x|)^2 + (y + |y|)^2 = 16 \quad .228$$

$$\frac{y}{|x|} + 1 = |xy| + y|y| \quad .230 \quad |y| = \frac{|x|}{x} - x^2 \quad .229$$

$$|y| + \frac{1}{|y|} = |x| + \frac{1}{|x|} \quad .231$$

$$x + |x| = y + |y| \quad .232$$

$$y = \frac{1}{125}(x^2 - 5)^2 \quad .233$$

$$y = x + \sqrt{y^2 + 2(x+1)y + 4x} \quad .234$$

$$y = \sqrt{\frac{2-3x}{x^2-5x+4}} \quad .235$$

$$y = \begin{cases} x \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad .236$$

.237. با در دست داشتن منحنی تابعهای $y = F(x)$ و $y = \varphi(x)$

منحنی تابع $y = F(\varphi(x))$ را چگونه می‌توان رسم کرد؟ منحنی تابعهای زیر را با استفاده از همین روش رسم کنید:

$$a) y = \log_7(x^2 + 2x + 3) \quad \text{و} \quad b) y = \log_7(\cos x)$$

.238. (a) منحنی نمایش تغییرات تابع $y = x^2 - 4\sqrt{x^2 + 3}$ را رسم

کنید. (b) معین کنید، این تابع در چه فاصله‌هایی صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است. (c) جوابهای $y = 0$ را بدست آورید. (d) در نقطه $A(0, 3)$ مماس بر منحنی به چه صورتی در می‌آید؟ (e) ثابت کنید خطهای مماس بر منحنی در نقطه‌های برخورد آن با محور طول، يك لوزی به وجود می‌آورند. مختصات رأسهای این لوزی را پیدا کنید.

$$.239. (a) \text{ منحنی نمایش تغییرات تابع } y = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - x - 2}} \text{ را رسم}$$

کنید. (b) تا توجه به این منحنی ثابت کنید معادله درجه چهارم زیر به ازای همه مقادیر $m \neq 0$ دارای چهارریشه حقیقی است:

$$x^4 - (m^2 + 18)x^2 + m^2x + 2m^2 + 81 = 0$$

$$.240. (a) \text{ منحنی نمایش تغییرات تابع } y = \frac{x^2}{2x^2 - 4x + 4} \text{ و خط}$$

$2y + 4x = 5$ را روی يك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید. (b) نقطه‌های

A و B را روی منحنی و نقطه C را روی خط‌طوری پیدا کنید که مثلث ABC

متساوی‌الاضلاع باشد.

(a. ۰۲۴۱) منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{x^2 + 2}{x}$ را رسم کنید.

(b) نقطه A به عرض a بر محور عرض واقع است. ثابت کنید اگر از نقطه A بتوانیم سه مماس بر منحنی تابع رسم کنیم و طولهای نقطه‌های تماس را x_1, x_2, x_3 بگیریم، همیشه داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3 = 4$$

(c) در حالتی که تنها دو مماس بتوان از نقطه A بر منحنی رسم کرد، ثابت کنید یکی از نقطه‌های تماس، نقطه عطف منحنی تابع است. در این حالت عرض نقطه A و طولهای نقطه‌های تماس را حساب کنید.

(a. ۰۲۴۲) در تابع $y = \frac{(a-1)x+1}{x^2} + \frac{b}{2(x-1)^2}$ مقادیر a و

b را طوری پیدا کنید که نقطه ماکزیم یا می نیم منحنی آن بر نقطه $(1, 2)$ منطبق باشد. (b) منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$ را رسم

کنید. (c) جهت تقعر منحنی تابعی را که رسم کرده‌اید، پیدا کنید. (d) معادله $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = 1$ را حل کنید.

(a. ۰۲۴۳) منحنی نمایش تغییرات هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید:

$$y = 8x^5 - 10x^2 + 5x \quad (c)$$

$$y = 3x^2 \quad (c')$$

(b) توضیح دهید چرا مرکز تقارن دو منحنی (c) و (c') بر هم منطبق اند؟ (c) از نقطه A بطول ۱ واقع بر منحنی (c') خطی با ضریب زاویه m گذرانده‌ایم. m را طوری پیدا کنید که خط بر منحنی مماس باشد. (d) در حالتی که این خط منحنی را غیر از A در دو نقطه دیگر B و C قطع می‌کند، ثابت کنید مکان M وسط پاره BC ، نیم خطی است از خط $2x + 1 = 0$ مبدا این نیم خط را تعیین کنید.

۰۲۴۴. فرض $p < 0$ ، معادله خطی را بنویسید که از نقطه‌های ماکزیمم و می نیمم و نقطه عطف منحنی تابع $y = x^2 + px + q$ بگذرد. همین مسأله را در مورد معادله کلی $y = ax^2 + bx + cx + d$ نیز حل کنید.

۰۲۴۵. اگر a و b و c سه عدد متمایز باشند، ثابت کنید منحنی نمایش تابع $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ همواره دارای یک ماکزیمم و یک می نیمم است. طولهای نقطه‌های، ماکزیمم و می نیمم را با سه عدد a و b و c مقایسه کنید. در حالتی که $a = b \neq c$ یا $a = b = c$ باشد، چه وضعی پیش می آید؟

۰۲۴۶. با چه شرطی منحنی تابع $y = \frac{x^2 + px + q}{x^2 + p'x + q}$ مرکز تقارنی واقع بر منحنی دارد؟

۰۲۴۷. (a) با چه شرطی منحنی تابع $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ دارای سه نقطه عطف است؟ (b) ثابت کنید در حالتی که منحنی این تابع سه نقطه عطف داشته باشد، این سه نقطه بر روی یک خط راست قرار دارد که ضریب زاویه آن مساوی نصف ضریب زاویه خطی است که از نقطه‌های ماکزیمم و می نیمم منحنی می گذرد.

۰۲۴۸. تابع $y = \frac{2x+1}{2x^2+1}$ داده شده است.

(a) منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید و نقطه‌های برخورد آنرا با خط $y = m$ بررسی کنید. (b) در حالتی که خط $y = m$ منحنی را در دو نقطه M و N قطع می کند، مکان نقطه P وسط MN و مکان نقطه Q زوج توافقی $A(0, m)$ را نسبت به M و N پیدا کنید. (c) اگر O مبدا مختصات باشد، معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن، ضریب زاویه خطهای OM و ON باشد، تحقیق کنید که بین این ضریب زاویه‌ها، رابطه‌ای مستقل از m وجود دارد و همچنین تحقیق کنید بین طولهای M و N ، رابطه‌ای مستقل از m وجود دارد و از آنجا نتیجه بگیرید که تصویرهای این دو نقطه روی محور طول، زوج توافقی

دو نقطه ثابت اند. این دو نقطه ثابت را پیدا کنید. (d) ثابت کنید برای اینکه سه نقطه به طولهای x_1, x_2, x_3 از منحنی بزرگ امتداد باشند، باید داشته باشیم:

$$4x_1x_2x_3 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - 2(x_1 + x_2 + x_3) = 1$$

(e) ثابت کنید نقطه‌های ماکزیمم و مینیمم تابع با نقطه برخورد آن با محور عرض بزرگ امتدادند. (f) ثابت کنید سه نقطه بر منحنی تابع وجود دارد که از هر یک از آنها می‌توان دو مماس منطبق برهم بر منحنی رسم کرد.

۲۴۹. تابع $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$ و خط $y = m$ مفروض است.

(a) منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید و ثابت کنید که این منحنی دارای سه نقطه عطف است که بزرگ امتدادند. (b) در تعداد نقطه‌های برخورد خط و منحنی بحث کنید. (c) مکان هندسی نقطه P وسط دو نقطه تلاقی خط و منحنی را مشخص کنید. (d) اگر تصویر دو نقطه تلاقی بر محور طول را A و B بنامیم، دو نقطه ثابت C و D چنان پیدا کنید که زوج توافقی هم نسبت به A و B باشند. (e) دستگاه انعکاس ثابتی پیدا کنید که در آن دو نقطه A و B همیشه منعکس یکدیگر باشند. (f) - دایره ثابتی پیدا کنید که بر دایره‌هایی که از A و B می‌گذرند عمود باشد. (g) ثابت کنید دایره‌هایی که به قطر AB رسم شوند، تشکیل یک دسته دایره می‌دهند. معادله محور اصلی این دایره‌ها را بنویسید.

۲۵۰. تابع $y = \frac{x+m}{1-x^2}$ ($m > 2$) مفروض است: خط $y = t$ ، منحنی

تابع را در دو نقطه A و B قطع می‌کند و C نقطه‌ای از این خط به طول a است. مطلوبست مکان هندسی نقطه D زوج توافقی C نسبت به A و B ، وقتی که خط $y = t$ به موازات خود حرکت می‌کند. a چقدر باشد تا این مکان به خط راست تبدیل شود؟ اگر $a \rightarrow \infty$ چه وضعی پیش می‌آید؟

۲۵۱. دربارهٔ شکل‌های مختلف منحنی تابع $y = \frac{3x^2 - 2}{x^2 + 2x + a}$ بحث

کنید.

۲۵۲. اگر x' و x'' طولها و y' و y'' عرضهای نقطه‌های ماکزیم‌ومی نیم

منحنی تابع $y = \frac{x^2 + ax + b}{y' - 2x}$ باشد، مقادیر a و b را طوری پیدا کنید

که داشته باشیم:

$$\begin{cases} 2(x' + x'') + y'y'' = 19 \\ y' + y'' + 2x'x'' = 16 \end{cases}$$

۲۵۳. تابع $y = (a+2)x^2 + 2x - a + 2$ مفروض است: a ثابت

کنید منحنی نمایش تغییرات تابع به ازای همه مقادیر a از دو نقطه ثابت عبور می‌کند. معادله خطی که از این دو نقطه می‌گذرد کدام است؟ b مکان اکثرهم منحنی این تابع را پیدا کنید و معلوم کنید چه قسمتی از مکان متعلق به ماکزیم و چه قسمتی متعلق به می‌نیم است؟

۲۵۴. ثابت کنید منحنی تابع $y = \frac{4x^2 - mx + m^2}{x - m}$ به ازای همه مقادیر

m بر دو خط ثابت مماس است.

۲۵۵. تابع $y = \frac{2x^2 + m^2}{x - 2m}$ که آنرا (c) می‌نامیم مفروض است.

a ثابت کنید منحنی نمایش تغییرات تابع (c) به ازای همه مقادیر $m \neq 0$ بر دو خط ثابت مماس است. b اگر M وسط دو نقطه ماکزیم و می‌نیم منحنی تابع (c) باشد، مکان نقطه M را وقتی که m تغییر می‌کند، پیدا کنید. $(m \neq 0)$ c معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن عرضهای نقطه‌های ماکزیم و می‌نیم باشد. d خط $y = h$ منحنی تابع (c) را، وقتی که $m = 1$ باشد، در دو نقطه A و B و محور عرض را در نقطه C قطع می‌کند، مطلوب است محاسبه طول نقطه D مزدوج توافقی C نسبت به A و B و معادله مکان هندسی نقطه D ، وقتی که h تغییر می‌کند.

۲۵۶. a در وجود و علامت طولهای نقطه‌های تلاقی منحنی دو تابع زیر

بحث کنید و در حالتی که دو منحنی بر هم مماس‌اند، مختصات نقطه‌های مشترک را

پیدا کنید:

$$\begin{cases} y = x^2 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{5}{2} & (c) \\ y = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + m & (c') \end{cases}$$

(b) به ازای $m = -\frac{1}{2}$ منحنی نمایش تغییرات دو تابع را رسم کنید و معادله

مماس بر منحنی تابع (c) را در نقطه‌ای که مرکز تقارن آنست پیدا کنید.

۲۵۷. ثابت کنید خط $y = mx - m(m-1)$ همواره بر یک سهمی

ثابت، که محوری موازی محور عرض دارد، مماس است.

۲۵۸. ثابت کنید که خط $m^2x - my + 3 = 0$ به ازای همه مقادیر m

بر یک سهمی ثابت، که محوری موازی محور طول دارد، مماس است.

۲۵۹. ثابت کنید خط $y = \frac{2}{m}(1 - \frac{x}{m})$ به ازای همه مقادیر حقیقی

m بر یک هذلولی ثابت، که مجانبهای موازی محورهای مختصات دارد،

مماس است.

۲۶۰. در وجود و علامت ریشه‌های معادله $x^3 - x^2 - 5x + a = 0$ بحث

کنید و در حالت وجود ریشه مضاعف، معادله را حل کنید.

۲۶۱. در وجود علامت ریشه‌های معادله درجه سوم

$mx^2 - x^2 - (3m-2)x - (2m+1) = 0$ بحث کنید و در حالت وجود

ریشه مضاعف، معادله را حل کنید.

۲۶۲. هذلولیهای $y = \frac{mx+2}{x-1}$ و $y = \frac{x+m-1}{x+1}$ مفروض‌اند.

(a) در تعداد نقطه‌های برخورد این دو هذلولی، وقتی که m تغییر می‌کند، بحث

کنید. (b) در حالتی که دو منحنی یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند، مکان وسط

دو نقطه تلاقی را پیدا کنید. (c) تصویرهای دو نقطه برخورد را روی محور طول

A و B می‌نامیم؛ دو نقطه ثابت C و D پیدا کنید که زوج توافقی یکدیگر نسبت به

B و A باشند. d) دستگاه انعکاس ثابتی پیدا کنید که در آن B و A همیشه منعکس یکدیگر باشند. e) دایره ثابتی پیدا کنید که بر همه دایره‌هایی که از A و B می‌گذرند عمود باشد.

۲۶۳. همه مقادیر حقیقی a را پیدا کنید که به ازای آنها، حتی يك مقدار حقیقی x پیدا نشود که در دو نامساوی زیر همزمان صدق کند:

$$\begin{cases} ax^2 + (a-3)x + \frac{2}{a} - 2a \geq 0 \\ ax > a^2 - 2 \end{cases}$$

۲۶۴. مطلوبست مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه محاورهای مختصات که در نامعادله $x^y > x^{\cos x}$ صدق کنند.

۲۶۵. مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه محاورهای مختصات را معین کنید که در نامعادله $x^x + y^y < x^y$ صدق کنند.

۲۶۶. مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه محاورهای مختصات را پیدا کنید که در نامعادله $(\sin x)^y < (\sin x)^x$ صدق کنند.

۲۶۷. مطلوبست مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه محاورهای مختصات که در نامعادله $\log_{\sin x} y > \log_{\sin x} \tan x$ صدق کنند.

۲۶۸. در جلد اول روشهای جبر (صفحه ۳۲۷ دیده شود) ثابت کردیم که برای واسطه توافقی، واسطه هندسی، واسطه حسابی و واسطه مربعی دو عدد مثبت a و b داریم:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

این نامساویها را بطریق هندسی ثابت کنید.

۲۶۹. به کمک رسم منحنی، راهی برای بحث در وجود جوابهای حقیقی معادله درجه چهارم زیر پیدا کنید:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

۲۷۰. تابع $y = (a+1)x^2 + (2a-1)x + a-1$ مفروض است.

ثابت کنید دو منحنی نظیر این تابع به ازای مقادیر $a = a_1$ و $a = a_2$ متجانس اند و مرکز تجانس دو منحنی، نقطه ثابت تابع است.

۲۷۱. تابع $y = (m+1)x^2 - (6m+t)x + 8(m+1)$ مفروض

است. ثابت کنید که اگر t عددی ثابت و m پارامتر تابع A و B دو نقطه ثابت منحنی

تابع باشد، عمود منصف AB با تغییر t همواره بزرگ سهمی ثابت مماس است.

۲۷۲. روشهای مختلف حل معادله درجه دوم و معادله درجه سوم و درجه

چهارم را به کمک رسم منحنی نشان دهید.

۵.

مقادیر حداکثر و حداقل

(ماکزیمم و می نیمم)

بررسی مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع، یکی از جالب ترین مباحث ریاضی است. اهمیت آن نه تنها بخاطر نتیجه های زیبایی است که در اینگونه مسأله ها بدست می آید، بلکه بیش از همه ناشی از کاربرد فراوان آن در صنعت و زندگی روزمره است.

آنچه که در برنامه های درسی در این باره صحبت می شود، مربوط به ماکزیمم و می نیمم نسبی است، در حالی که در عمل بیشتر ماکزیمم و می نیمم مطلق مورد نیاز است. از این گذشته تنوع مسأله هایی که در دوره دبیرستان مورد بررسی قرار می گیرند، بسیار محدود و ناچیز است و گاهی از حدودی که برای رسم منحنی نمایش تغییرات تابعهای مقدماتی لازم است، تجاوز نمی کند.

به همین مناسبت بحث کوتاهی در این باره ضروری به نظر می رسد، منتهی برای اینکه بحث به درازا نکشد، بسیاری از نکته های مربوط به این بخش را ضمن تمرین ها آورده ایم و بنا بر این باید گفت که بخصوص در این بخش درس و تمرین رویهم جوابگوی نیاز دانش آموزان است.

۱- ماکزیمم و می نیمم نسبی و ماکزیمم و می نیمم مطلق

تعریف. گویند تابع $y=f(x)$ به ازای $x=a$ ماکزیمم نسبی است، بشرطی که برای مقادیر کوچک ε داشته باشیم:

$$f(a+\varepsilon) < f(a) ; f(a-\varepsilon) < f(a)$$

و یا به زبان ساده تر، در منحنی نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ عرض نقطه ای که به ازای $x=a$ بدست می آید، بزرگتر از عرضهای نقطه های مجاور خود باشد.

همچنین $y=f(x)$ به ازای $x=b$ می نیمم نسبی است، وقتی که برای مقادیر بسیار کوچک ε داشته باشیم:

$$f(b+\varepsilon) > f(b) ; f(b-\varepsilon) > f(b)$$

یعنی عرض نقطه ای که به ازای $x=b$ بدست می آید، از عرضهای نقطه های مجاور خود کوچکتر باشد.

وقتی که می گوئیم تابع $y=f(x)$ در فاصله $a \leq x \leq b$ به ازای $x=\alpha$ ماکزیمم مطلق (یا می نیمم مطلق) است، به این معناست که به ازای $x=\alpha$ حداکثر (یا حداقل) مقدار برای y بدست می آید.

مثلا تابع $y=x^3-3x$ به ازای $x=-1$ ماکزیمم نسبی و به ازای $x=1$ می نیمم نسبی است. در حالیکه تابع $y=x^2-2x$ به ازای $x=1$

می‌نیمم مطلق است ($y = -1$) یعنی درفاصله $(-\infty, +\infty)$ هر مقدار دیگری برای x انتخاب کنیم، مقدار y بزرگتر از -1 بدست می‌آید.

دراین بخش درباره ماکزیمم و می‌نیمم مطلق بحث می‌کنیم و چون در اکثر موارد منظور مسأله روشن است از ذکر کلمه «مطلق»، بجز در مواردی که ابهامی ایجاد کند، صرفنظر می‌کنیم.

۲. استدلال آزاد

در بسیاری از مسأله‌ها، می‌توان بدون استفاده از یک روش خاص، ماکزیمم و یا می‌نیمم مطلق را با استدلال آزاد بدست آورد، اگرچه در اکثر این موارد استفاده از مشتق و یا قضایای مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم مطلق هم مسأله را به جواب می‌رساند.

چند نمونه ذکر کنیم.

مثال ۱. روی پاره خط $AB = a$ ، نقطه M را چنان پیدا کنید که حاصل ضرب $AM \times MB$ حداکثر باشد.

حل. $AM = x$ فرض می‌کنیم، $MB = a - x$ خواهد شد و داریم:

$$AM \times MB = x(a - x) = ax - x^2 = \frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

a مقداری است ثابت و بنابراین $\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$ وقتی ماکزیمم است که

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \text{ مساوی صفر باشد:}$$

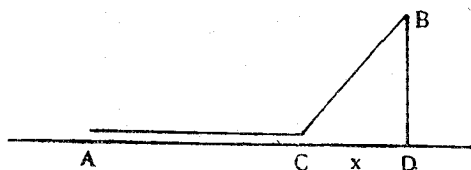
$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 0 \implies x - \frac{a}{2} = 0 \implies x = \frac{a}{2}$$

یعنی برای اینکه $AM \times MB$ حداکثر مقدار خود باشد، باید نقطه M در وسط پاره خط AB قرار گیرد.

مثال ۲. دهستان B در ۲ کیلومتری راه آهن (که بطور مستقیم ادامه دارد)

(شکل ۴) قرار دارد. ایستگاه فرعی C را در چه نقطه‌ای از مسیر راه آهن بسازیم

تا مسافت از A تا B (از A تا C به وسیله قطار و از C تا B به وسیله



جاده شوسه) در کمترین وقت ممکن انجام شود؟ سرعت حرکت قطار ۰/۸ و سرعت در جاده شوسه ۰/۲ کیلومتر در دقیقه است.

شکل ۵۶

حل. اگر D پای عمودی باشد که از B بر مسیر فرود می آید، فاصله

AD را a و CD را x می گیریم، در این صورت داریم:

$$AC = a - x; CB = \sqrt{x^2 + 400}$$

زمان لازم برای رسیدن از A به B چنین می شود (بر حسب دقیقه):

$$t = \frac{a-x}{0.8} + \frac{\sqrt{x^2+400}}{0.2} \quad (1)$$

باید می نیم t را بدست آوریم، رابطه (۱) را می توان چنین نوشت:

$$0.8t - a = -x + 4\sqrt{x^2 + 400}$$

اگر $0.8t - a = k$ فرض و معادله را گویا کنیم، به معادله درجه دوم زیر می رسم:

$$15x^2 - 2kx + 6400 - k^2 = 0$$

$$x = \frac{k \pm \sqrt{16k^2 - 96000}}{15}$$

و از آنجا:

۱۵

وقتی t می نیم باشد، $k = 0.8m - a$ نیز می نیم است و برعکس^۲،

ولی برای اینکه مقدار x حقیقی باشد، باید داشته باشیم:

(۱) این مسأله از کتاب «سرگرمیهای جبر» برداشته شده است.

(۲) باید در نظر داشت که $k > 0$ است زیرا دادیم،

$$0.8t = a - x + 4\sqrt{x^2 + 400} > a - x + x = a$$

$$۱۶k^2 - ۹۶۰۰۰ > ۰ \Rightarrow k > ۲۰\sqrt{۱۵}$$

و بنابراین $k = ۲۰\sqrt{۱۵}$ می نیمم مقدار k است و به ازای این مقدار

k داریم:

$$x = \frac{k \pm ۰}{۱۵} = \frac{۲۰\sqrt{۱۵}}{۱۵} \neq ۵/۱۶$$

یعنی باید ایستگاه فرعی تقریباً در ۵ کیلومتری نقطه D ساخته شود و همانطور

که دیده می شود، جواب به $a = AD$ بستگی ندارد.

ولی این جواب وقتی مفهوم دارد که $a < x$ باشد، زیرا ضمن تشکیل

معادله مقدار $x - a$ را مثبت فرض کردیم.

البته اگر $a \leq ۵$ باشد، دیگر ساختن ایستگاه فرعی لازم نیست و باید

جاده شوسه را مستقیماً به ایستگاه اصلی کشید.

مثال ۳. به ازای چه مقادیری از x و y عبارت زیر حداقل مقدار

ممکن است:

$$۵x^2 + ۹y^2 - ۱۲xy - ۶x + ۱۴$$

حل. روش اول) عبارت مفروض را می توان چنین نوشت:

$$۵x^2 + ۹y^2 - ۱۲xy - ۶x + ۱۴ =$$

$$= (x^2 - ۶x + ۹) + (۴x^2 + ۹y^2 - ۱۲xy) + ۵ =$$

$$= (x - ۳)^2 + (۲x - ۳y)^2 + ۵$$

و واضح است که حداقل مقدار برای عبارت مفروض وقتی بدست می آید

که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x - ۳ = ۰ \\ ۲x - ۳y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۲ \end{cases}$$

که در اینصورت مقدار عبارت برابر با ۵ خواهد بود.

روش دوم) عبارت را برابر a فرض می کنیم، داریم:

$$۵x^2 - ۶(۲y + ۱)x + (۹y^2 + ۱۴ - a) = ۰$$

$$x = \frac{۳(۲y + ۱) \pm \sqrt{-۹y^2 + ۳۶y + ۵a - ۶۱}}{۵}$$

و از آنجا:

برای اینکه مقدار x حقیقی باشد، باید عبارت زیر رادیکال مثبت و یا صفر شود. یعنی داشته باشیم:

$$-9y^2 + 36y + 5a - 61 \geq 0$$

$$a \geq \frac{9y^2 - 36y + 61}{5} = \frac{(3y - 6)^2 + 25}{5} \quad \text{یعنی:}$$

و ما به حداقل a احتیاج داریم:

$$a = \frac{9}{5}(y - 2)^2 + 5$$

و حداقل این مقدار هم به ازای $y = 2$ بدست می آید که در اینصورت $a = 5$ و $x = 3$ خواهد شد.

یعنی عبارت مفروض به ازای $(x = 3$ و $y = 2)$ برابر است با حداقل مقدار خود یعنی ۵.

مثال ۴. روی خط $x'x$ نقطه $A, B, C, \dots, L$ را به فاصله‌های متوالی

a از یکدیگر جدا می کنیم. نقطه‌ای مانند M روی $x'x$ طوری پیدا کنید که حاصل جمع زیر می نیم باشد:

$$y = \overline{MA}^2 + 2\overline{MB}^2 + 3\overline{MC}^2 + \dots + n\overline{ML}^2$$

حل. خط $x'x$ را محوری در نظر می گیریم به مبدا A ، بنابراین

طولهای نقاط $L, \dots, C, B$ بترتیب $a, 2a, \dots, (n-1)a$ می شود. اگر نقطه مجهول M را به طول x فرض کنیم، داریم:

$$y = x^2 + 2(a-x)^2 + 3(2a-x)^2 + \dots + n[(n-1)a-x]^2$$

که به سادگی به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} y = & [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)]x^2 - 2a[1 \times 2 + \\ & + 2 \times 2 + \dots + (n-1)n]x + \\ & + a^2[2 \times 1^2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 3^2 + \dots + n(n-1)^2] \end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم (به بخش مجموعه‌ها از جلد اول مراجعه شود):

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + (n-1)n = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

$$2 \times 1^2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 3^2 + \dots + n(n-1)^2 = \frac{n(n+1)(n-1)(3n-2)}{12}$$

و بنابراین باید می نیم عبارت زیر را پیدا کنیم:

$$12y = 6n(n+1)x^2 - 8an(n+1)(n-1)x + a^2n(n+1)(n-1)(3n-2)$$

مقدار ثابت این عبارت در می نیم آن تأثیری ندارد، بنابراین باید می نیم عبارت زیر را بدست آورد:

$$\begin{aligned} & 6n(n+1)x^2 - 8an(n+1)(n-1)x = \\ & = 6n(n+1) \left[x^2 - \frac{4}{3}a(n-1)x \right] = \\ & = 6n(n+1) \left[\left(x - \frac{2(n-1)}{3}a \right)^2 - \frac{4(n-1)^2a^2}{9} \right] \end{aligned}$$

می نیم این عبارت هم به ازای $x = \frac{2}{3}(n-1)a$ خواهد بود. یعنی نقطه M

باید به فاصله $\frac{2}{3}(n-1)a$ از A و در جهت نقاط C, B, ... واقع باشد.

مثال ۵. اگر A و B و C زاویه های يك مثلث باشند، حداکثر عبارت

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

چقدر است؟

حل. داریم:

$$\begin{aligned} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \sin \frac{A}{2} \right) \end{aligned}$$

اگر بجای $\cos \frac{B-C}{2}$ حداکثر آن یعنی ۱ را قرار دهیم (که تنها در

حالت $B=C$ پیش می‌آید)، می‌توان نوشت:

$$\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} < \frac{1}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right)$$

دو طرف نامساوی اخیر را در $\sin \frac{A}{2}$ ضرب می‌کنیم (چون A زاویه‌ای

از مثلث است، $\sin \frac{A}{2} > 0$ است)، می‌شود:

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} < \frac{1}{2} \sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right)$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$\sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \sin \frac{A}{2} \right)^2$$

و بنابراین حداکثر عبارت $\sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right)$ برابر $\frac{1}{4}$ است و از

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} \quad \text{آنجا:}$$

یعنی حداکثر عبارت $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ برابر است با $\frac{1}{8}$ و آنهم وقتی

است که $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ یعنی مثلث مفروض متساوی‌الاضلاع باشد.

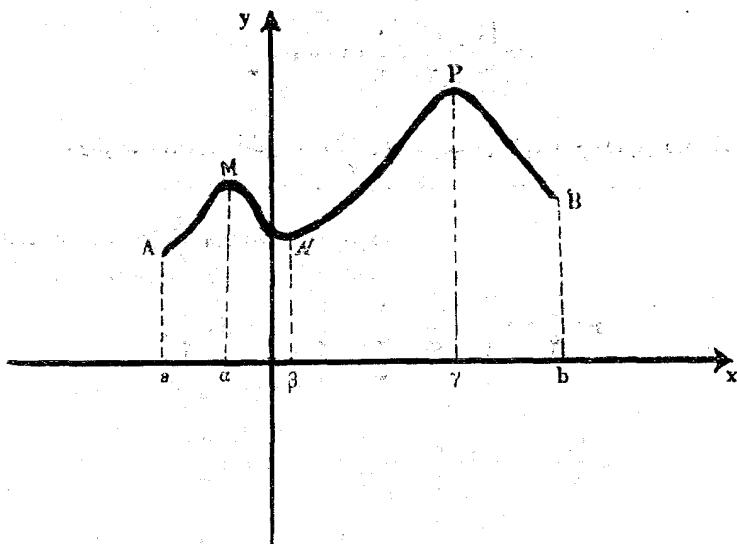
۳. محاسبهٔ ماکزیمم و می‌نیمم مطلق با استفاده از مشتق

وقتی که تابع يك متغیرهٔ $y=f(x)$ در تمام نقطه‌های فاصلهٔ $[a, b]$ متصل و دارای مشتق باشد، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع به‌ازای یکی از طولهای ماکزیمم و می‌نیمم نسبی، یا یکی از دو کرانهٔ متغیر (a و b) بدست می‌آید.

فرض کنید منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ به‌صورت

شکل ۵۷ باشد:

مشتق این تابع در فاصلهٔ $[a, b]$ ، در سه نقطهٔ به‌طولهای α و β و γ تغییر



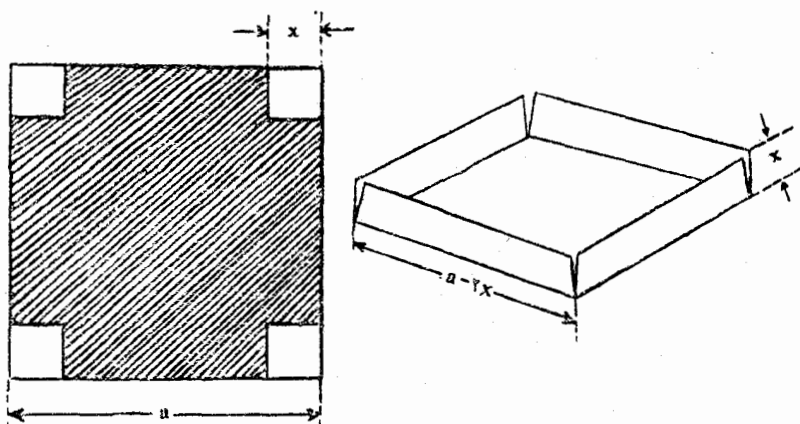
شکل ۵۷

علامت می‌دهد و همانطور که روی شکل دیده می‌شود، ما کریمم مطلق تابع به ازای $x = \gamma$ (یکی از جوابهای مشتق) و می نیمم مطلق تابع به ازای $x = a$ (یکی از کرانه‌های متغیر) بدست می‌آید $P\gamma$ حداکثر و Aa حداقل مقدار تابع در فاصله $[a, b]$ است).

بنابراین برای پیدا کردن ما کریمم و می نیمم مطلق در تابع يك متغیره متصل، طولهای ما کریمم و می نیمم نسبی و کرانه‌های متغیر را به جای x در تابع قرار می‌دهیم، حداکثری که بدست آید مربوط به ما کریمم مطلق و حداقلی که بدست آید مربوط به می نیمم مطلق است.

مثال ۱۰. می‌خواهیم از مربع به ضلع a قوطی مکعب مستطیل روبازی بسازیم که ارتفاع آن x باشد (شکل ۵۸)، x را چقدر بگیریم تا حجم مکعب مستطیل ما کریمم شود؟

(۱) این مسأله از کتاب «ریاضیات - محتوی، روش و اهمیت آن» برداشته شده است.



شکل ۵۸

حل. حداقل x مساوی صفر و حداکثر آن مساوی $\frac{a}{2}$ است، یعنی x در

فاصله $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ تغییر می‌کند. اگر حجم مکعب مستطیل را y فرض کنیم، داریم:

$$y = x(a - 2x)^2$$

که مشتق آن نسبت به x چنین است:

$$y' = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = (a - 2x)(a - 6x) ;$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}, \frac{a}{6}$$

به ازای $x = 0$ و $x = \frac{a}{2}$ (دو کرانه متغیر) مقدار حجم (یعنی y) مساوی صفر

می‌شود، که مربوط به حداقل حجم است. بنابراین حداکثر حجم به ازای $x = \frac{a}{6}$

بدست می‌آید.

$$\frac{2a^3}{27} \text{ حجم ماکزیمم برابر است با:}$$

مثال ۲. از بین استوانه‌های دوار به سطح کل S ، حجم کدامیک
ماکزیمم است؟

حل. اگر شعاع قاعده استوانه را x فرض کنیم، سطح جانبی استوانه
مساوی $S - 2\pi x^2$ خواهد شد، برای اینکه سطح جانبی منفی نباشد باید
داشته باشیم:

$$S - 2\pi x^2 \geq 0 \Rightarrow x \leq \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$$

و بنابراین حدود تغییرات x چنین است: $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$

با این شرط، ارتفاع استوانه از تقسیم سطح جانبی بر محیط قاعده
بدست می‌آید:

$$h = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x}$$

و v ، حجم استوانه چنین می‌شود:

$$v = \pi x^2 \times \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{1}{2}(Sx - 2\pi x^3)$$

مقدار v به ازای $x = 0$ و $x = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ برابر صفر می‌شود، بنابراین ماکزیمم

حجم به ازای یکی از جوابهای مشتق بدست می‌آید:

$$v' = \frac{1}{2}(S - 6\pi x^2);$$

$$v' = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{S}{6\pi} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

اگر این مقدار x را در رابطه h قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$h = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

و بنابراین. حجم ماکزیمم برای استوانه‌ای است که در آن قطر قاعده مساوی ارتفاع استوانه باشد، یا بعبارت دیگر از مقطع محوری آن يك مربع بدست آید.

مثال ۳. می‌خواهیم ظرف مکعب مستطیل شکلی بسازیم بنحوی که نسبت

طول به عرض قاعده آن $\frac{1}{4}$ و حجم آن مساوی V باشد، اگر قیمت مصالحی که برای هر واحد مربع قاعده آن بکار می‌رود ثلث قیمتی باشد که برای هر واحد مربع از بقیه ظرف مصرف می‌شود. ارتفاع ظرف را بچه اندازه بگیریم، تا برای ساختن ظرف حداقل قیمت لازم باشد.

حل. عرض قاعده را x فرض می‌کنیم، طول قاعده مساوی $2x$ و ارتفاع

آن مساوی $y = \frac{V}{2x^2}$ خواهد شد. اگر قیمت هر واحد مربع را برای

قاعده، a فرض می‌کنیم، مخارج قاعده ظرف $2ax^2$ و مخارج سطحهای جانبی $6axy \times 3a = 18axy$ و مخارج قاعده بالا $6ax^2 \times 3a = 18ax^2$ می‌شود و بنابراین مخارج ساختن تمام ظرف چنین است:

$$P = 2ax^2 + 18axy + 6ax^2 = 2a(4x^2 + 9xy)$$

که اگر بجای y مقدارش $\frac{V}{2x^2}$ را قرار می‌دهیم، پس از ساده کردن می‌شود:

$$P = a \times \frac{8x^2 + 9V}{x}$$

$$P' = a \times \frac{16x - 9V}{x^2} ; \quad \text{و از آنجا:}$$

$$P' = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9V}{2}}$$

و سپس مقدار y بدست می‌آید:

$$y = \frac{V}{2x^2} = \frac{V}{\sqrt[3]{\frac{81V}{4}}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{4V}{3}}$$

به این ترتیب اگر V معلوم باشد، ابعاد مکعب مستطیل معین می‌شود، ولی بهتر است که نسبت $\frac{y}{x}$ را محاسبه کنیم:

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{4V}{3}}}{\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9V}{2}}} = \frac{4}{9}$$

یعنی برای حداقل مخارج، باید طول و عرض و ارتفاع مکعب مستطیل را بر نسبت عددهای ۱ و ۲ و ۳ گرفت.

۴. ماکزیم يك حاصلضرب

دوقضیه زیر برای پیدا کردن ماکزیم بعضی از حاصلضربها کمک می‌کند.
قضیه ۱. اگر مجموع چند متغیر مثبت مقداری ثابت باشد، حاصلضرب آنها وقتی ماکزیم است که این متغیرها با هم برابر باشند.
اثبات. فرض کنیم n متغیر مثبت $x, y, z, \dots, t$ مجموع ثابتی داشته باشند:

$$x + y + z + \dots + t = na$$

حاصلضرب این متغیرها را در نظر می‌گیریم:

$$P = x \cdot y \cdot z \cdot \dots \cdot t$$

چون مجموع را na گرفته‌ایم، وقتی که این متغیرها برابر نباشد، لااقل یکی از آنها از a بزرگتر و یکی دیگر از a کوچکتر است. اگر $y < a$ و $x > a$

باشد و فرض کنیم $x = a + \alpha$. حاصلضرب:

$$P_1 = a \cdot (y + \alpha) \cdot z \dots t$$

همان مجموع na را دارد (زیرا از x به اندازه α کم کردیم و همان مقدار را به y افزودیم). در اینصورت داریم:

$$P_1 - P = z \dots t [a(y + \alpha) - (a + \alpha)y]$$

$$P_1 - P = z \dots t [(a - y)\alpha] \quad \text{و یا:}$$

مقدار داخل کروشه مثبت است، زیرا فرض کردیم $y < a$ باشد، بنابراین داریم:

$$P_1 - P > 0 \Rightarrow P_1 > P$$

به این ترتیب اگر یکی از متغیرها مساوی a شود، حاصلضرب بزرگ می شود و اگر این استدلال را تکرار کنیم، به این نتیجه می رسیم که وقتی همه آنها برابر باشند، حاصلضرب حداکثر خواهد بود.

مثال ۱. ازین مثلثهای بامحیط ثابت $2p$ ، سطح کدامیک ماکزیمم است؟
حل. رابطه مساحت مثلث را می نویسیم $a)$ و $b)$ و $c)$ ضلعها و S مساحت
مثلث است):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

S وقتی ماکزیمم است که $\frac{S^2}{p}$ ماکزیمم باشد و برعکس:

$$\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c)$$

متغیرهای $p-a$ ، $p-b$ و $p-c$ مثبت و به مجموع ثابت اند، زیرا:

$$(p-a) + (p-b) + (p-c) = 3p - (a+b+c) = p$$

و بنابراین حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است که این متغیرها برابر باشند:

$$p-a = p-b = p-c \Rightarrow a = b = c$$

یعنی سطح ماکزیمم متعلق به مثلث متساوی الاضلاع است.

مثال ۲. اگر α و β و γ سه زاویه حاده و مثبت به مجموع $\frac{\pi}{2}$ باشند،

ماکزیم عبارت $y = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$ را بدست آورید.

حل. میدانیم که اگر $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$ باشد، داریم:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma = 1 \quad (1)$$

از طرف دیگر داریم:

$$y^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \gamma = (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)(\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma)(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma)$$

و حاصلضرب سه متغیر مثبت (که مجموع ثابتی دارند)، وقتی ماکزیمم است که با هم برابر باشند:

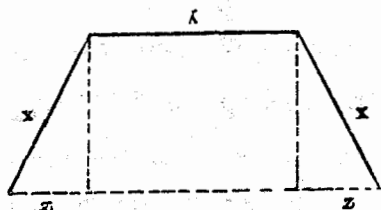
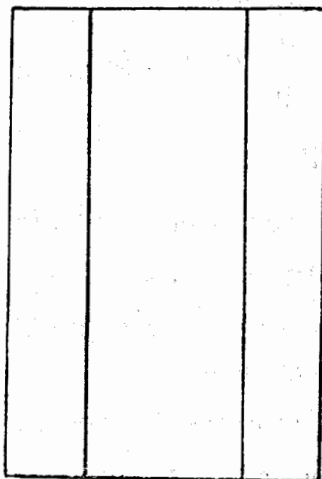
$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma$$

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{6} \quad \text{و از آنجا:}$$

و مقدار ماکزیمم:

$$y = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

مثال ۳. می‌خواهیم ورقه فلزی مستطیل شکلی را به شکل ناودانی درآوریم که مقطع آن دوزنقه متساوی الساقین باشد (شکل ۵۹). عرض باریک‌های دو طرف



شکل ۵۹

را چقدر بگیریم و آنها را تحت چه زاویه‌ای خم کنیم، تا مقطع ناودان حداکثر مساحت را داشته باشد؟

حل. عرض ورقه فلزی را a می‌گیریم، اگر مجهولات را طبق شکل ۵۹ در نظر بگیریم، داریم:

$$2x + y = a$$

و حالا S سطح دوزنقه مقطع را حساب می‌کنیم:

$$S = (y + z) \sqrt{x^2 - z^2}$$

$$3S^2 = (y + z)(y + z)(x + z)(3x - 3z) \quad \text{و یا:}$$

چهار متغیر سمت راست تساوی، همه مثبت‌اند (زیرا $x > z$ است) و ضمناً مجموع این متغیرها مقداری است ثابت:

$$(y + z) + (y + z) + (x + z) + (3x - 3z) = 2(2x + y) = 2a$$

و بنابراین حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است که باهم برابر باشند:

$$y + z = x + z = 3x - 3z$$

و از آنجا بدست می‌آید:

$$x = y = \frac{a}{3}; \quad z = \frac{x}{2} = \frac{a}{6}$$

و بنابراین با توجه به رابطه $z = \frac{x}{2}$ ، زاویه روبروی به z مساوی 30° درجه می‌شود.

به این ترتیب باید عرض ورقه فلزی را به سه قسمت مساوی تقسیم کرد و باریکه‌ها را تحت زاویه 120° درجه خم کرد، تا مقطعی با سطح ماکزیمم بدست آید.

در حقیقت مقطع به صورت سه ضلع متوالی از یک شش ضلعی منتظم در می‌آید.

قضیه ۲. اگر $x, y, z, \dots, t$ متغیرهای مثبت به مجموع ثابت باشند،

حاصلضرب $x^m \cdot y^n \cdot z^p \dots t^q$ وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \dots = \frac{t}{q}$$

اثبات. مقادیری از x و y و z و $\dots$ و t که عبارت $x^m \cdot y^n \cdot z^p \dots t^q$

را ماکزیمم کنند، عبارت $\frac{x^m}{m} \cdot \frac{y^n}{n} \cdot \frac{z^p}{p} \dots \frac{t^q}{q}$ را هم ماکزیمم خواهد کرد،

ولی عبارت اخیر را می توان نوشت:

$$\left(\frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m} \dots \frac{x}{m} \right) \left(\frac{y}{n} \cdot \frac{y}{n} \dots \frac{y}{n} \right)$$

$$\left(\frac{z}{p} \cdot \frac{z}{p} \dots \frac{z}{p} \right) \dots \left(\frac{t}{q} \cdot \frac{t}{q} \dots \frac{t}{q} \right)$$

این عبارت دارای $m+n+p+\dots+q$ جمله مثبت است که شامل m جمله

مساوی $\frac{x}{m}$ ، n جمله مساوی $\frac{y}{n}$ ، p جمله مساوی $\frac{z}{p}$ ، $\dots$ ، q جمله مساوی $\frac{t}{q}$ است

و بنابراین مجموع آنها:

$$m \times \frac{x}{m} + n \times \frac{y}{n} + p \times \frac{z}{p} + \dots + q \times \frac{t}{q} =$$

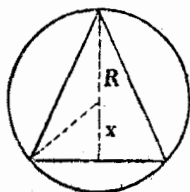
$$= x + y + z + \dots + t$$

مقدار است ثابت. پس وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \dots = \frac{t}{q}$$

مثال ۴. در کره ای به شعاع R ، مخروط دواری با حجم ماکزیمم

محاط کنید.



شکل ۶۰

حل. اگر ارتفاع مخروط را $R+x$ فرض کنیم (شکل ۶۰)، شعاع قاعده مخروط مساوی $\sqrt{R^2 - x^2}$ می شود و در نتیجه می توان حجم مخروط را بر حسب R و x نوشت:

$$V = \pi (\sqrt{R^2 - x^2})^2 (R+x) = \pi (R+x)^2 (R-x)$$

مجموع دو متغیر مثبت $(R+x)$ و $(R-x)$ مقدار یست ثابت:

$$(R+x) + (R-x) = 2R$$

و بنابراین حاصلضرب $(R+x)^2 (R-x)$ وقتی ماکزیمم است که این تساوی را داشته باشیم:

$$\frac{R+x}{2} = R-x \Rightarrow x = \frac{R}{3}$$

که در این صورت ارتفاع مخروط مساوی $\frac{4R}{3}$ و شعاع قاعده آن مساوی $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$ می شود.

مثال ۵. پاره خط $AB = a$ را به ۳ قسمت چنان تقسیم کنید که حاصلضرب قطعه اول در مربع قطعه دوم در مکعب قطعه سوم، حداکثر مقدار ممکن باشد. حل. اگر قطعه های AB را x و y و z فرض کنیم، باید ماکزیمم عبارت $x \cdot y^2 \cdot z^3$ را پیدا کنیم و چون $x + y + z = a$ مقدار یست ثابت، بنابراین ماکزیمم وقتی حاصل می شود که داشته باشیم:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

یعنی باید پاره خط AB را به نسبت ۱ و ۲ و ۳ تقسیم کرد، در این صورت مقادیر قطعه ها از دستگاه زیر بدست می آید:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \\ x + y + z = a \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{6} \\ y = \frac{a}{3} \\ z = \frac{a}{2} \end{array} \right.$$

و مقدار ماکزیم حاصلضرب مساوی $\frac{a^3}{6}$ می شود.

مثال ۶. ماکزیم عبارت $x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x^2}$ را حساب کنید.
حل. عبارت مفروض را می توان چنین نوشت:

$$x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x^2} = \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{1-x^2} = (x^2)^{\frac{3}{4}} \cdot (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

و چون مجموع متغیرهای مثبت x^2 و $1-x^2$ مقداریست ثابت، ماکزیم عبارت وقتی بدست می آید که داشته باشیم:

$$\frac{\frac{x^2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{1-x^2}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

و مقدار ماکزیم عبارت برابر $\frac{1}{5} \sqrt{\frac{108}{5}} \approx 0.425$ می شود.

۵. می نیمم يك مجموع

دوقضیه زیر به محاسبه می نیمم بعضی مجموعها كمك می کنند.

قضیه ۱. اگر حاصلضرب چند متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع

آنها وقتی می نیمم است که این متغیرها با هم برابر باشند.

اثبات. فرض می کنیم داشته باشیم:

$$\underbrace{x \cdot y \cdot z \dots t}_{n \text{ متغیر}} = a^n$$

اگر همه متغیرها برابر a نباشد، لااقل یکی از آنها از a بزرگتر و دیگری از a کوچکتر است، مثلاً اگر $q > 1$ باشد، فرض می‌کنیم $x = aq > a$ و $y < a$ ، در این صورت اگر مجموع متغیرها را S بنامیم، داریم:

$$S = aq + y + z + \dots + t$$

اولین جمله را مساوی a می‌گیریم و برای اینکه حاصلضرب متغیرها

تغییر نکند بجای جمله دوم $\frac{y}{q}$ می‌گیریم:

$$S' = a + \frac{y}{q} + z + \dots + t$$

در این صورت داریم:

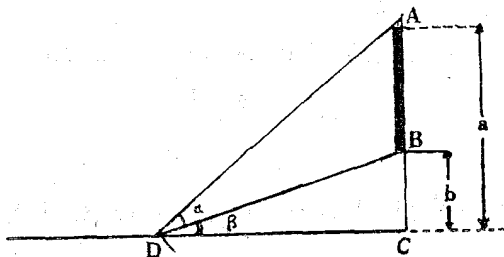
$$S - S' = a(q - 1) + y(1 - \frac{1}{q})$$

که با توجه به اینکه $q > 1$ بود $S - S' > 0$ و $S' < S$ می‌شود.

به این ترتیب اگر یکی از متغیرها را برابر a بگیریم، مجموع کوچک می‌شود و اگر این استدلال را ادامه دهیم، در حالتی که همه متغیرها برابر a باشند، می‌نیم مجموع بدست می‌آید.

مثال ۰۱. قاب عکسی روی دیوار بطور قائم قرار گرفته است، در چه فاصله‌ای

از دیوار قرار بگیریم تا قاب را با زاویهٔ ماکزیم ببینیم؟



شکل ۶۱

حل. فرض می‌کنیم در حالتی که ناظر کنار دیوار باشد فاصلهٔ AC کنار

بالای قاب تا چشم ناظر) برابر a و فاصله BC (کنارپائین قاب تا چشم ناظر) برابر b بشود، زاویه دید قاب AB را از نقطه D مساوی α می گیریم. به يك زاویه كمکی β نیز كه در شكل ۶۱ مشخص شده، احتیاج داریم. روابط زیر واضح است:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{a}{x} ; \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{x}$$

(x را فاصله مجهول CD گرفته ایم).

در رابطه $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ بجای $\operatorname{tg} \beta$ مقدارش را قرار میدهیم:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \frac{b}{x}}{1 - \frac{b}{x} \operatorname{tg} \alpha} = \frac{a}{x} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{(a-b)x}{x^2 + ab}$$

α زاویه ای است حاده و بنابراین ما کزیم آن همراه با ما کزیم $\operatorname{tg} \alpha$ و یا می نیم $\operatorname{cotg} \alpha$ است:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{x^2 + ab}{x} = \frac{1}{a-b} \left(x + \frac{ab}{x} \right)$$

متغیرهای x و $\frac{ab}{x}$ مثبت و به حاصلضرب ثابت اند، بنابراین مجموع

آنها وقتی می نیم است که با هم برابر باشند:

$$\frac{ab}{x} = x \Rightarrow x = \sqrt{ab}$$

که در این صورت تاثرات زاویه دید قاب AB چنین است:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$$

مثال ۲. از بین چهار ضلعی های محاطی با سطح ثابت، محیط کدامیک

می نیم است؟

حل. اگر ضلعهای چهار ضلعی محاطی را a, b, c, d و محیط آنرا $2p$

فرض کنیم، باید می نیم عبارت زیر را پیدا کنیم:

$$2p = (p-a) + (p-b) + (p-c) + (p-d)$$

ولی می‌دانیم (S مساحت چهارضلعی است):

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) = S^2$$

بنابراین مجموع چهار متغیر مثبت، که حاصلضرب ثابتی دارند، وقتی می‌نیم است که با هم برابر باشند:

$$p-a = p-b = p-c = p-d$$

$$a = b = c = d \quad \text{وازا آنجا:}$$

یعنی باید چهار ضلعی محاطی به صورت مربع باشد تا محیط می‌نیم داشته باشد.

مثال ۳. از دو نقطه A و B که در دو طرف خط d قرار دارند، دایره‌ای بگذرانید که روی خط مفروض و تری با طول می‌نیم به وجود آورد.

حل. محل تلاقی AB را با خط d، M می‌گیریم و فرض می‌کنیم

MA = a و MB = b. اگر دایره‌ای که از A و B می‌گذرد، خط d را

در نقطه‌های P و Q قطع کند و MP = x بگیریم، $MQ = \frac{ab}{x}$ می‌شود (زیرا

داریم: $MA \times MB = MP \times MQ$) و بنابراین باید می‌نیم

$$y = x + \frac{ab}{x} \quad \text{را بدست آوریم.}$$

ولی با توجه به ثابت بودن حاصلضرب x و $\frac{ab}{x}$ می‌نیم وقتی حاصل

می‌شود که داشته باشیم:

$$x = \frac{ab}{x} \Rightarrow x = \sqrt{ab}$$

وازا آنجا: $y = 2\sqrt{ab}$ خواهد شد.

مثال ۴. بردایره‌ای به شعاع R، لوزی با مساحت می‌نیم محیط کنید.

حل. اگر قطعه‌هایی از ضلع لوزی را که بوسیله نقطه تماس با دایره جدا

شده اند y و x و زاویه لوزی مجاور به x را 2α بگیریم، داریم:

$$x = R \cot \alpha ; y = R \tan \alpha$$

و مساحت لوزی چنین می شود:

$$S = 2R^2 (\tan \alpha + \cot \alpha)$$

حاصل ضرب $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ مقداری است ثابت و بنابراین مجموع آنها

وقتی می نیمم است که با هم برابر باشند:

$$\tan \alpha = \cot \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

یعنی $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ و لوزی باید به مربع تبدیل شود.

قضیه ۲. اگر برای متغیرهای مثبت $x, y, z, \dots, t$ ، حاصل ضرب

$x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma \cdot \dots \cdot t^\lambda$ مقدار ثابتی باشد، مجموع آنها وقتی می نیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \dots = \frac{t}{\lambda}$$

اثبات. وقتی که حاصل ضرب $x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma \cdot \dots \cdot t^\lambda$ ثابت باشد، حاصل ضرب

$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{y}{\beta}\right)^\beta \cdot \left(\frac{z}{\gamma}\right)^\gamma \cdot \dots \cdot \left(\frac{t}{\lambda}\right)^\lambda$ نیز ثابت خواهد بود. در عبارت اخیر

$(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda)$ عامل وجود دارد (α عامل مساوی $\frac{x}{\alpha}$ ، β عامل

مساوی $\frac{y}{\beta}$ ، $\dots$ ، λ عامل مساوی $\frac{t}{\lambda}$) مجموع این عاملها $x + y + z + \dots + t$

می شود که در حالت مساوی بودن آنها می نیمم می شود، یعنی:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \dots = \frac{t}{\lambda}$$

مثال ۵. اگر a و b و x مقادیری مثبت باشند، می نیمم عبارت:

$$y = \frac{a^4 + b^2 x^2}{x^2} \text{ را بدست آورید.}$$

حل. عبارت مفروض را می‌توان به صورت $y = \frac{a^4}{x^2} + b^2 x^2$ نوشت و

چون داریم:

$$\left(\frac{a^4}{x^2}\right)^2 \times b^2 x^2 = a^8 b^2 = \text{مقدار ثابت}$$

بنابراین عبارت y وقتی می‌نیم است که داشته باشیم:

$$\frac{a^4}{x^2} = b^2 x^2 \Rightarrow x = a \sqrt[4]{\frac{a}{b^2}}$$

و می‌نیم y (به‌ازای این مقدار x) برابر $\frac{3a^5 \sqrt[4]{2ab^2}}{2}$ خواهد بود.

مثال ۶. از مخروطهای به حجم ثابت v اولاً کدامیک با مولد می‌نیم،

ثانیاً کدامیک با سطح جانبی می‌نیم خواهند بود.

حل. شعاع قاعده مخروط را x می‌گیریم، در اینصورت ارتفاع مخروط

مساوی $\frac{3v}{\pi x^2}$ می‌شود و مولد مخروط به سادگی بدست می‌آید:

$$l^2 = x^2 + \frac{9v^2}{\pi^2 x^4}$$

می‌نیم مولد l همراه با می‌نیم l^2 است، ازطرف دیگر داریم:

$$(x^2)^2 \times \frac{9v^2}{\pi^2 x^4} = \frac{9v^2}{\pi^2} = \text{مقدار ثابت}$$

و بنابراین وقتی مقدار l می‌نیم است که داشته باشیم:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{9v^2}{\pi^2 x^2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3v\sqrt{2}}{\pi}}$$

حالا سطح جانبی مخروط را بر حسب x بدست می آوریم:

$$S = 2\pi x \times \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + \frac{9v^2}{\pi^2 x^2}} \Rightarrow S^2 = \pi^2 x^4 + \frac{9v^2}{x^2}$$

و با توجه به اینکه حاصلضرب $\pi^2 x^4 \times (\frac{9v^2}{x^2})^2$ مقداری ثابت است. می نیمم S وقتی است که داشته باشیم:

$$\pi^2 x^4 = \frac{9v^2}{2x^2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3v}{\pi\sqrt{2}}}$$

تمرین

۰۲۷۳. اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد، می نیمم این تابع را پیدا کنید:

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + \sec^4 x + \operatorname{cosec}^4 x$$

۰۲۷۴. مستطیلی با سطح ماکزیمم در یک بیضی مفروض محاط کنید.

۰۲۷۵. مکعب مستطیلی به حجم ماکزیمم در یک بیضوی به معادله:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

محاط کنید.

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2+1)^2(x^2+3)} : (3x^2+4) \text{ حداکثر تابع}$$

را پیدا کنید.

۰۲۷۷. اگر a و b و c عددهایی مثبت باشند، حداقل تابع:

$$y = \sqrt{x^2 + a} + \sqrt{(c-x)^2 + b}$$

را بدست آورید.

۰۲۷۸ اگر m و n و p و q مقادیری مثبت و $|m| < |n|$ و $|p| < |q|$ باشد

می‌نیمم تابع: $y = \sqrt{x^2 - 2mx + n^2} + \sqrt{x^2 - 2px + q^2}$

ماکزیمم تابع: $y = \sqrt{x^2 + 2mx + n^2} - \sqrt{x^2 - 2px + q^2}$ را بدست آورید.

۰۲۷۹ حداقل تابع:

$$y = \sqrt{-x^2 + 4x + 12} - \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

را بدست آورید.

۰۲۸۰ با شرط $0 < \alpha < 90^\circ$ حداقل عبارت $(1 + \frac{1}{\sin \alpha})(1 + \frac{1}{\cos \alpha})$

را پیدا کنید.

۰۲۸۱ با شرط مثبت بودن مقادیر a و b و c ماکزیمم تابع زیر را

بدست آورید:

$$y = \frac{3x^2}{ax^2 + bx^2 + c}$$

۰۲۸۲ اگر a و b و c و d مقادیری مثبت و $abcd = 1$ باشد، می‌نیمم

عبارت $\Sigma a^2 + \Sigma ab$ را بدست آورید.

۰۲۸۳ حداکثر و حداقل تابع $y = \frac{\cos^2 x - 4 \cos x + 5}{3 - 2 \cos x}$ را

محاسبه کنید.

۰۲۸۴ به شرط $a \geq 0$ حداکثر و حداقل تابع:

$$y = (a + \sin x)(a + \cos x)$$

را بدست آورید.

۰۲۸۵ اگر a و b مقادیری مثبت و $0 < x < 1$ باشد، حداقل تابع

$$y = \frac{a^x}{x} + \frac{b^x}{1-x}$$

را پیدا کنید.

۰۲۸۶ مطلوبست حداقل مقدار نسبت يك عدد سه رقمی به مجموع

رقمهای آن.

۰۲۸۷ به ازای چه مقادیری از x و y عبارت زیر حداقل است:

$$A = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 4y + 3$$

۰۲۸۸ اگر $0 < x \leq a$ و $0 < y \leq a$ باشد، حداقل تابع:

$$z = \frac{2a^2 - x^2 - y^2}{a^2 - xy}$$

را پیدا کنید.

۰۲۸۹ کوچکترین عدد به صورت $2^n + 3^n$ را که بر ۶۲۵ قابل قسمت

باشد بدست آورید.

۰۲۹۰ اگر $ax + by + cz = d$ باشد، می‌نیم عبارت $x^2 + y^2 + z^2$

را بدست آورید.

۰۲۹۱ ماکزیم و می‌نیم هریک از دو تابع زیر را بدست آورید:

$$y_1 = \frac{a \sin x + b \cos x + c}{a' \sin x + b' \cos x + c'} ; y_2 = \frac{\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$$

۰۲۹۲ دستگاه زیر را نسبت به x و y حل کنید:

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha = a \cos^3 \alpha \\ x \sin \alpha - y \cos \alpha = 3a \sin^3 \alpha \end{cases}$$

و وقتی که $x^2 + y^2$ حداکثر با حداقل مقدار خود را دارد، α را محاسبه کنید.

۰۲۹۳ بر کره ثابت، مخروط دواری با حجم می‌نیم محیط کنید.

۰۲۹۴ در کره‌ای، مخروط دواری با حجم ماکزیم محاط کنید.

۰۲۹۵ روی ضاعهای مستطیل به محیط ثابت، نیمدایره‌هایی به قطر ضلعها

و در خارج مستطیل کشیده‌ایم. می‌نیم مساحت شکل حاصل را پیدا کنید.
 ۲۹۶. می‌نیم مساحت دوزنقه متساوی‌الساقینی که محیط بردایرهٔ شعاع R باشد، پیدا کنید.

۲۹۷. در کره‌ای به شعاع R ، مخروط ناقصی محاط کنید که يك قاعده‌اش دایرهٔ عظیمه‌ای از کره و سطح جانبی‌اش ماگزیمم باشد.
 ۲۹۸. از استوانه‌های با حجم ثابت V ، کداميك در كوچكترین کره قابل محاط است.

۲۹۹. دو خط راه آهن یکدیگر را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند. دو قطار روی این دوخط و به طرف محل تلاقی حرکت می‌کنند، یکی از ایستگاهی که در ۴ کیلومتری محل تلاقی است و دیگری از ایستگاهی که در ۵۰ کیلومتری آنجاست. اولی دقیقه‌ای ۸۰۰ متر و دومی دقیقه‌ای ۶۰۰ متر سرعت دارد. پس از چه مدتی از لحظه شروع حرکت، فاصلهٔ بین دو قطار حداقل خواهد شد؟

۳۰۰. مکعب‌مستطیلی با حجم ماگزیمم در يك استوانهٔ مفروض محاط کنید.
 ۳۰۱. قطاعی را طوری از يك دایره جدا کنید، که با بقیهٔ دایره بتوان مخروطی با حجم ماگزیمم ساخت.

۳۰۲. ماگزیمم و می‌نیم عبارت $S = p \sin x + q \cos x$ را حساب کنید.
 ۳۰۳. اگر n عددی طبیعی باشد، حداقل تابع زیر را پیدا کنید:

$$f(x) = \left(\frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x} \right)^n + \left(\frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right)^n$$

۳۰۴. حداقل و حداکثر مقدار زیر را بدست آورید:

$$y = \sqrt{\frac{(x-2)^2 + 4}{x^2 + 4}}$$

۳۰۵. از رأس A در مثلث ABC ، خط I را چنان رسم کنید که اولاً مجموع فاصله‌های B و C از آن حداقل باشد؛ ثانیاً مجموع فاصله‌های B و C از آن حداکثر باشد.

۳۰۶. خط MN از زاویه مفروض A ، مثلثی بامساحت Q جدا می‌کند
(N و M روی ضلعهای این زاویه‌اند) با چه شرطی طول پاره خط MN حداقل
است؟ در این حالت طول MN چقدر است؟

۳۰۷. روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC ، بترتیب دو نقطه M
و N را طوری پیدا کنید که مثلث ABC به وسیله خط MN به دو شکل هم‌ارز
تبدیل می‌شود و ضمناً طول MN حداقل باشد.

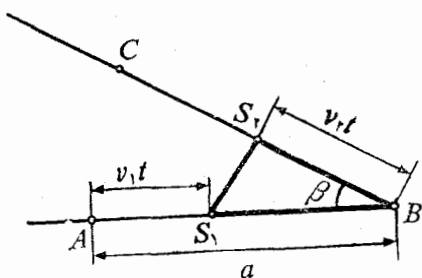
۳۰۸. هر يك از عددهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، بدون اینکه بهم ارتباطی
داشته باشند، می‌توانند مقادیر $10^1, 10^2, \dots, 10^n$ را قبول کنند. حداقل مجموع همه حاصل-
ضربهای ممکنه دو به دوی این عددها چقدر است؟

۳۰۹. حداقل مقدار مجموع همه حاصلضربهای ممکنه دوه دو را درمورد
 n عدد $x_1, x_2, \dots, x_n$ پیدا کنید، بشرطی که هر يك از آنها از لحاظ قدر
مطلق بیشتر از واحد نباشد.

۳۱۰. از بین همه مخروطهای دوار محاط در يك کره مفروض، آنرا
پیدا کنید که سطح کل ماکزیم داشته باشد.

۳۱۱. متحرکی از نقطه A

بطرف نقطه B با سرعت v_1 حرکت
می‌کند (شکل ۶۲). در همین‌زمان
متحرك دیگری از نقطه B بطرف
نقطه C با سرعت v_2 حرکت می‌کند.



شکل ۶۲

اگر $\angle ABC = \beta$ و $AB = a$ معلوم

باشند، بعد از چه مدتی فاصله بین دو متحرك به حداقل خود می‌رسد؟

۳۱۲. مطلوبست حداقل مقدار تابع $f(x, y) = \frac{y}{x}$ ، در مجموعه

مقادیر (x, y) که در معادله $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 1$ صدق می‌کنند.

۳۱۳. اگر d, c, b, a مقادیری مثبت باشند، حداقل مقدار مجموع

زیر را پیدا کنید:

$$S = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} + \\ + \frac{b+c+d}{a} + \frac{a+c+d}{b} + \frac{a+b+d}{c} + \frac{a+b+c}{d}$$

۳۱۴. با شرط $x, y, z, t \geq 0$ و $x+z=1$ و $y+t=1$ ، حداقل

و حداکثر مقدار تابع زیر را پیدا کنید:

$$f(x, y, z, t) = \frac{ax^2 + by^2}{ax + by} + \frac{az^2 + bt^2}{az + bt}$$

(h و a مقادیر مثبت و ثابتی اند).

۳۱۵. تابع $73x^2 + 52y^2 + 72xy = 100$ مفروض است. از مرکز

تقارن منحنی این تابع، خطی با ضریب زاویه m می‌گذرد و منحنی را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. m را طوری پیدا کنید که طول AB حداکثر یا حداقل مقدار ممکن باشد.

۳۱۶. در صفحهٔ محوره‌های مختصات، نقطه‌های ۱۵ مختصات صحیح را

قرار داده‌ایم. حداکثر مساحت، برای مربعی که شامل حتی یکی از این نقطه‌ها نباشد، چقدر است؟

۶.

تابع اولیه و محاسبه سطح و حجم

فرض کنید f یک تابع حقیقی باشد که در یک بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد. اگر f یک تابع اولیه باشد، یعنی یک تابعی که مشتق آن f' برابر f باشد، داریم:

$$f'(x) = f(x)$$

در این صورت، می‌توانیم f را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$f(x) = e^x + C$$

که C یک ثابت حقیقی است. این نتیجه را می‌توانیم از طریق روش جداسازی متغیرها اثبات کنیم. فرض کنیم $y = f(x)$ و $dy = f'(x) dx = f(x) dx$. با جداسازی متغیرها داریم:

$$\frac{dy}{y} = dx$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف داریم:

$$\ln|y| = x + C$$

که C یک ثابت حقیقی است. با گرفتن توان از دو طرف داریم:

$$|y| = e^{x+C} = e^x e^C$$

چون $y = f(x)$ و f یک تابع حقیقی است، داریم:

$$f(x) = e^x e^C$$

که e^C یک ثابت حقیقی است. با گذاشتن $C = \ln C$ داریم:

$$f(x) = e^x + C$$

این نتیجه را می‌توانیم به صورت دیگری نیز اثبات کنیم. فرض کنیم f یک تابع حقیقی باشد که در یک بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد. اگر f یک تابع اولیه باشد، یعنی یک تابعی که مشتق آن f' برابر f باشد، داریم:

$$f'(x) = f(x)$$

در این صورت، می‌توانیم f را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$f(x) = e^x + C$$

که C یک ثابت حقیقی است. این نتیجه را می‌توانیم از طریق روش جداسازی متغیرها اثبات کنیم. فرض کنیم $y = f(x)$ و $dy = f'(x) dx = f(x) dx$. با جداسازی متغیرها داریم:

$$\frac{dy}{y} = dx$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف داریم:

$$\ln|y| = x + C$$

که C یک ثابت حقیقی است. با گرفتن توان از دو طرف داریم:

$$|y| = e^{x+C} = e^x e^C$$

چون $y = f(x)$ و f یک تابع حقیقی است، داریم:

$$f(x) = e^x e^C$$

که e^C یک ثابت حقیقی است. با گذاشتن $C = \ln C$ داریم:

$$f(x) = e^x + C$$

اگرچه استفاده از فکر «انتگرال گیری، را می توان حتی در کارهای «ارشمیدس» و پس از آن در نوشته های بسیاری از ریاضی دانهای «اسلامی» دید، ولی بدون تردید باید دوران حکومت آنرا از زمان «نیوتون» و «لایب نیس» به بعد دانست. این دو دانشمند، اولی در جستجوهای مربوط به محاسبه سرعت حرکت و دومی در جستجوی راه حل کلی برای رسم مماس بر منحنی و محاسبه مساحت شکل های منحنی الخط، بطور جداگانه به مفهوم کم و بیش دقیق «مشتق» و «تابع اولیه» رسیدند. اما کار برد این دو مفهوم تنها در دایره اولیه خود محدود نماند و امروز «حساب دیفرانسیل و انتگرال»، مبنایی برای همه انواع محاسبات شده است و باید گفت که «آنالیز ریاضی» قسمت عمده بار خود را بر دوش آن گذاشته است

ما در جستجوی تابع اولیه، تنها به روشهایی می پردازیم که با برنامه های درسی دبیرستانی سازگار باشد. آنها که علاقه بیشتری داشته باشند، برای توسعه آموزش خود در این زمینه، باید به کتابهای «آنالیز ریاضی» مراجعه کنند.

۱- روش کلی

در روشهای مقدماتی مربوط به محاسبه تابعهای اولیه يك تابع، روش کار منجر به این می شود که بتوانیم تابع مفروض را به صورت $y = af'(x) \cdot [f(x)]^m$ در آوریم، چون در این صورت، تابعهای اولیه آن به صورت زیر در خواهد آمد:

$$Y = \frac{a}{m+1} [f(x)]^{m+1} + c$$

(که در آن c عبارتست از مقدار ثابت دلخواه).

مثال ۱. $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ ، که می توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$y = x(x^2+1)^{-2} = \frac{1}{2}(2x) \cdot (x^2+1)^{-2}$$

و از آنجا، تابعهای اولیه آن چنین می شود:

$$Y = \frac{\frac{1}{2}}{-2+1} (x^2+1)^{-1} + c = -\frac{1}{2(x^2+1)} + c$$

مثال ۲. $y = tg^3 x + tg^5 x$ ، که به صورت زیر در می آید:

$$y = (1 + tg^2 x) tg^3 x = (tg x)' \cdot (tg x)^3,$$

و در نتیجه تابعهای اولیه آن $Y = \frac{1}{4} tg^4 x + c$ می شود.

۲. تابعهای اولیه $y=f(x)(ax+b)^m$

وقتی که $f(x)$ چند جمله‌ای از x باشد (m الزاماً عدد صحیح نیست)،
 $f(x)$ را بر حسب توانهای $(ax+b)$ منظم می‌کنیم و سپس تابع اولیه می‌گیریم.

مثال ۳. مطلوبست تابعهای اولیه $y = \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}$

حل. تابع مفروض را به اینصورت می‌نویسیم:

$$y = x^3(x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

باید x^3 را بر حسب توانهای $x-1$ منظم کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم:

$$x-1=t \Rightarrow x=t+1,$$

$$x^3 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1$$

و از آنجا بدست می‌آید:

$$y = [(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1](x-1)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= (x-1)^{\frac{5}{2}} + 3(x-1)^{\frac{3}{2}} + 3(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

و در نتیجه تابعهای اولیه y چنین است:

$$Y = \frac{2}{11}(x-1)^{\frac{11}{2}} + \frac{9}{8}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{5}(x-1)^{\frac{3}{2}} +$$

$$+ \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{440}(40x^3 + 45x^2 + 54x +$$

$$+ 81)\sqrt{x-1} + c$$

مثال ۴. مطلوبست تابعهای اولیه $y = x^5(2x^3+1)^m$

حل. تابع مفروض را به ترتیب به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = x^5 \cdot x^3(2x^3+1)^m = x^8 \left[\frac{1}{2}(2x^3+1) - \frac{1}{2} \right] (2x^3+1)^m =$$

$$= \frac{1}{2}x^8(2x^3+1)^{m+1} - \frac{1}{2}x^8(2x^3+1)^m$$

و از آنجا:

$$Y = \frac{1}{12(m+2)}(2x^2+1)^{m+2} - \frac{1}{12(m+1)}(2x^2+1)^{m+1} + c$$

و یا پس از ساده کردن:

$$Y = \frac{(2x^2+1)^{m+1}}{12(m+1)(m+2)} [(m+1)(2x^2+1) - (m+2)] + c;$$

$$Y = \frac{[2(m+1)x^2-1](2x^2+1)^{m+1}}{12(m+1)(m+2)} \quad \text{وبالاخره:}$$

۳. تابعهای اولیه $y = \sin^{2n+1}x$ ، $y = \cos^{2n+1}x$ ، $y = \tan^n x$

مثلا برای تابع $y = \sin^{2n+1}x$ می توان نوشت:

$$y = \sin x \cdot \sin^{2n}x = \sin x (1 - \cos^2 x)^n$$

که پس از باز کردن پراکنز و ضرب در $\sin x$ ، تمام جمله ها به صورت $au'u^n$ در می آید و قابل تابع اولیه گرفتن است.

مثال ۵. مطلوبست تابع اولیه $y = \sin^5 x$.

حل. بترتیب داریم:

$$\begin{aligned} y &= \sin x \cdot \sin^4 x = \sin x (1 - \cos^2 x)^2 = \\ &= \sin x - 2 \sin x \cos^2 x + \sin x \cos^4 x \end{aligned}$$

و از آنجا:

$$Y = -\cos x + \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + c$$

مثال ۶. مطلوبست تابعهای اولیه تابع $y = \tan^4 x$.

حل. بترتیب چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} y &= \tan^4 x = (1 + \tan^2 x) \tan^2 x - (1 + \tan^2 x) \tan^2 x + \\ &\quad + (1 + \tan^2 x) \tan^2 x - (1 + \tan^2 x) + 1 \end{aligned}$$

و چون $1 + \tan^2 x$ مشتق $\tan x$ است خواهیم داشت:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{\vee} x - \frac{1}{5} \operatorname{tg}^{\delta} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^{\gamma} x - \operatorname{tg} x + x + c$$

۴. تابعهای اولیه توانهای زوج سینوس و کسینوس

برای توانهای زوج سینوس و کسینوس باید از تبدیل به کسینوس قوس دو برابر استفاده کرد، یعنی از دو رابطه زیر:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) ; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

مثال ۷. مطلوبست تابعهای اولیه تابع $y = \sin^4 x$.

حل. بترتیب می نویسیم:

$$\begin{aligned} y = \sin^4 x &= \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right]^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right] = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x) \end{aligned}$$

واز آنجا تابعهای اولیه y چنین می شود:

$$Y = \frac{1}{8}(3x - 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x) + c$$

$$Y = \frac{1}{32}(12x - 8\sin 2x + \sin 4x) + c \quad \text{و یا:}$$

مثال ۸. تابعهای اولیه تابع $y = \cos^6 x$ را بدست آورید.

حل. بترتیب داریم:

$$\begin{aligned} y = \cos^6 x &= \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right]^3 = \\ &= \frac{1}{8}(1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x) = \\ &= \frac{1}{8} \left[1 + 3\cos 2x + \frac{3}{2}(1 + \cos 4x) + \cos 2x(1 - \sin^2 2x) \right] = \\ &= \frac{1}{16}(5 + 8\cos 2x + 3\cos 4x - 2\cos 2x \sin^2 2x) \end{aligned}$$

واز آنجا تابعهای اولیه y چنین است:

$$Y = \frac{1}{16}(\Delta x + 4 \sin 2x + \frac{3}{4} \sin 4x - \frac{1}{3} \sin^3 2x) + c$$

و یا: $Y = \frac{1}{192}(60x + 48 \sin 2x + 9 \sin 4x - 4 \sin^3 2x) + c$

مثال ۹. مطلوبست تابعهای اولیه تابع $y = \sin^2 2x \sin^2 3x$.

حل. با توجه به رابطه $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ داریم:

$$\sin^2 3x = \frac{1}{2}(1 - \cos 6x)$$

و با توجه به رابطه: $\sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^4 \alpha$ و یا:

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$$

$$\sin^3 2x = \frac{1}{4}(3 \sin 2x - \sin 6x)$$

واز آنجا:

$$y = \frac{1}{8}(1 - \cos 6x)(3 \sin 2x - \sin 6x) =$$

$$= \frac{1}{8}(3 \sin 2x - \sin 6x - 3 \sin 2x \cos 6x + \sin 6x \cos 6x) =$$

$$= \frac{1}{8}[3 \sin 2x - \sin 6x - \frac{3}{4}(\sin 8x - \sin 4x) + \frac{1}{4} \cos 12x] =$$

$$= \frac{1}{16}(6 \sin 2x + 3 \sin 4x - 2 \sin 6x - 3 \sin 8x + \sin 12x)$$

و از آنجا:

$$Y = \frac{1}{16}(-3 \cos 2x - \frac{3}{4} \cos 4x + \frac{1}{3} \cos 6x + \frac{3}{8} \cos 8x - \frac{1}{12} \cos 12x) + c$$

و یا:

$$Y = -\frac{1}{384}(72\cos 2x + 18\cos 4x - 8\cos 6x - 9\cos 8x + 2\cos 12x) + c$$

تمرین

۰۳۱۷ اگر $|x| < 1$ باشد، حد مجموع زیر را بدست آورید:

$$x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

۰۳۱۸ اگر $|x| < 1$ باشد حد مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$1 \times 2x + 2 \times 3x^2 + 3 \times 4x^3 + 4 \times 5x^4 + \dots$$

۰۳۱۹ مطلوبست محاسبه مجموع زیر:

$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \dots + n\cos nx$$

تابعهای اولیه هریک از تابعهای زیر را بدست آورید:

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \quad .321$$

$$y = x(ax+b)^m \quad .320$$

$$y = \frac{x^{11}}{\sqrt[5]{x^2-1}} \quad .323 \quad \frac{x^2+x^2+x+1}{\sqrt[3]{1-x}} \quad .322$$

$$y = \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^{n+2}} \quad .325 \quad y = \frac{(2x+3)^5}{(\Delta x-1)^7} \quad .324$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^2}} \quad .327 \quad y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \quad .326$$

$$y = (x^5+x^2+x)(x^2+1)^m \quad .329 \quad y = \frac{1}{1-\sin x} \quad .328$$

$$y = \cot g^{10} x \quad .331 \quad y = \cos^9 x \quad .330$$

$$y = \sin^5 2x \cos^2 \Delta x \quad .333 \quad y = \sin mx \cos nx \quad .332$$

$$y = \frac{\sin X \cos X}{\sqrt{a \sin^2 X + b \cos^2 X + c}} \quad .۳۳۵$$

$$y = \frac{\sin X + \cos X}{\sin X - \cos X} \quad .۳۳۴$$

$$y = \frac{x^2(x^2 + 2x^2 + 3x + 2)}{(x^2 + x^2 + x + 1)^2} \quad .۳۳۷$$

$$y = \frac{\sin X}{1 - \cos X} \quad .۳۳۶$$

$$y = \frac{3 \sin^2 \frac{X}{2} \cos \frac{X}{2}}{\sqrt{(\cos X - 1)^4}} \quad .۳۳۹$$

$$\frac{a \cot X (\cot X - 1)^m}{\sin^2 X} \quad .۳۳۸$$

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

$$.۳۴۱ \quad y = \frac{\sin^n X}{\cos^{n+2} X} \quad .۳۴۰$$

$$y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$.۳۴۳ \quad y = (1-x^2) \sqrt{x} \sqrt{x} \quad .۳۴۲$$

$$y = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$$

$$.۳۴۵ \quad y = \frac{x}{4+x^2} \quad .۳۴۴$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

$$.۳۴۷ \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} \quad .۳۴۶$$

$$y = \frac{\sin X + \cos X}{\sqrt[3]{\sin X - \cos X}}$$

$$.۳۴۹ \quad y = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \quad .۳۴۸$$

$$y = \frac{1}{\sin^2 X \cos^2 X}$$

$$.۳۵۱ \quad y = \frac{x^2+1}{x^2+1} \quad .۳۵۰$$

$$y = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

$$.۳۵۳ \quad y = \cos^2 X \sqrt{\sin X} \quad .۳۵۲$$

$$y = x|x|$$

$$.۳۵۵ \quad y = |x| \quad .۳۵۴$$

$$y = |x+1| - |1-x|$$

$$.۳۵۷ \quad y = (x+|x|)^2 \quad .۳۵۶$$

.۳۵۸ مطلوبست $f(x)$ بشرطی که $f'(x^2) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) باشد.

.۳۵۹ مطلوبست $f(x)$ بشرطی که $f'(\sin^2 X) = \cos^2 X$ باشد.

۳۶۰. مطلوبست معادله کلی منحنی‌هایی که قائمهای بر آنها از مبدأ مختصات

عبور کند.

۳۶۱. اگر ضریب زاویه مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه $M(x, y)$

بصورت $\frac{x-1}{y-2}$ باشد، مطلوبست $y = f(x)$ بشرطی که منحنی آن از مبدأ مختصات

عبور کند.

۳۶۲. جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$ را رسم

کنید و حجم حاصل از دوران این منحنی را دور محور xx' در فاصله صفر و $\frac{\sqrt{3}}{3}$ حساب کنید.

۳۶۳. تابعی بصورت $y = f(x)$ تعیین کنید به قسمی که بین y' و y'' مشتقات

مرتبه اول و دوم آن رابطه $y'y'' = \frac{x^2 - 1}{2x^5}$ برقرار باشد و منحنی نمایش تغییرات

آن در نقطه‌ای به طول واحد بر محور طولها مماس شود.

۳۶۴. مطلوبست محاسبه سطح محصور بین محور xx' و دو خط $x = 0$ و

$x = \frac{\pi}{4}$ و منحنی نمایش تابع $y = \sin^2 2x - \sin 2x$.

۳۶۵. مطلوبست محاسبه سطح محصور بین منحنی $y = \cos^3 x$ و محور

xx' و محور yy' و خط $x = \frac{\pi}{4}$.

۳۶۶. اولاً منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1}$ را رسم کنید.

ثانیاً حجم حاصل از دوران منحنی را حول محور ox در فاصله $x = 2$ و $x = 3$ بدست آورید.

۳۶۷. مطلوبست محاسبه حجم حاصل از دوران سطح محصور بین کمان

منحنی نمایش $y = \frac{x}{x^2 + x + 1} \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ و خطهای $x = -2$ و $x = 1$ و محور طولها، دور محور طولها.

۳۶۸. از نقطه $A(-1, 0)$ دو مماس AB و AC بر سهمی $y^2 = x - 2$

رسم می کنیم، مطلوبست محاسبه سطح بین این دو مماس و منحنی و نیز حجم حاصل از دوران این سطح حول BC (و B و C نقطه های تماس اند).

۳۶۹. منحنی تابع $y = x^2 - 2x + 3$ را دور محور yy' دوران داده ایم

مطلوبست حجم حاصل از دوران سطحی که بین دو خط $y = 3$ و $y = 5$ و محور y ها و قوس منحنی (در ربع اول) واقع است.

۳۷۰. سطح محصور بین منحنی $y = 5x^2 + 1$ و خط $y = 10x + 1$

را دور محور xx' دوران می دهیم، حجمی را که بدست می آید حساب کنید.

۳۷۱. سطح محصور بین منحنی $y = x + \frac{1}{2x^2}$ و خط $y = x$ و خطهای

موازی با محور عرضها به معادله های $x = 1$ و $x = \lambda > 1$ را بدست آورید.

۳۷۲. تابع $y = \frac{1}{6} \left(x^3 + \frac{3}{x} \right)$ مفروض است. در صورتیکه مقدار تابع

اولیه $\sqrt{1 + y'^2}$ از $x = 1$ تا $x = \sqrt{\tan \alpha}$ برابر $\frac{1}{3}$ شود، α را محاسبه کنید.

۳۷۳. مطلوبست تعیین تابع $y = f(x)$ در صورتیکه اولاً منحنی نمایش

این تابع در نقطه ای بطول $\frac{1}{4}$ بر محور طولها مماس شود. ثانیاً بین y' و y'' ،

مشتقات مرتبه اول و مرتبه دوم تابع مزبور، رابطه $y''(y' - 1) = 4x$

برقرار باشد.

۳۷۴. تابع $y=f(x)$ را طوری تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات

آن در نقطه A به طول ۲ بر خط $y+3x=7$ مماس باشد و بین تابع و مشتقهای اول و دوم آن رابطه زیر برقرار باشد:

$$2x + 2yy'' + y'y'' = 0$$

تابعهای اولیه هریک از تابعهای زیر را پیدا کنید:

$$y = \frac{x^4 + x^2 + 3x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} \quad ۳۷۶ \quad y = \frac{x^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^2} \quad ۳۷۵$$

$$y = \frac{x+3}{x^2 \sqrt{2x+3}} \quad ۳۷۸ \quad y = \frac{\sqrt[3]{2x-5x^2} - x^4}{x^2 \sqrt[3]{2-5x}} \quad ۳۷۷$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 2)^2} \quad ۳۸۰ \quad y = \frac{5x^2 + 8x + 14}{(x^2 + x - 2)^2} \quad ۳۷۹$$

$$y = \sqrt[5]{\frac{4 - \sqrt[3]{x^2}}{x \sqrt[3]{x^2}}} \quad ۳۸۲ \quad y = \sqrt[5]{\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{x}} \quad ۳۸۱$$

۳۸۳. تابع $y=f(x)$ را چنان پیدا کنید که بین مشتقهای اول و دوم آن

رابطه $y'y'' - y'' = 4x$ برقرار باشد و مماس بر منحنی در نقطه به طول $\frac{1}{4}$ ، بر محور طول منطبق باشد.

۳۸۴. معادله منحنی‌هایی را پیدا کنید که تحت قائمهای همه نقطه‌های آن

نسبت یک محور، مقداری ثابت باشد.

۳۸۵. تابع $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ مفروض است. خط $x=m$ ، با فرض مثبت

بودن m ، منحنی نمایش تغییرات تابع مزبور را در M قطع می‌کند. نقطه عطف منحنی

را R و طول آن را λ می‌نامیم. اگر $\lambda > m$ باشد: a) اندازه سطح بین قوس MR

و دو خط $x=m$ و $x=\lambda$ و محور طول را پیدا کنید. b) چنانچه قوس MR

دور محور طول دوران کند، اندازه حجمی را که ایجاد خواهد شد، بدست

آورید. c) وقتی که m بسمت بی نهایت میل کند، حد اندازه سطح و حجم بالا را پیدا کنید.

۳۸۶. a) منحنی نمایش تغییرات تابع $y^2 = x^2(2-x)$ را رسم کنید.

b) مساحت قسمتی از صفحه را که به صورت حلقه‌ای به وسیله منحنی محصور شده است، پیدا کنید.

۳۸۷. a) منحنی نمایش تغییرات دو تابع :

$$y = x + 1 + \frac{4}{(x+1)^2} \text{ و } y = x + 1 + \frac{4}{(x-3)^2}$$

را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

b) سطح محصور بین دو منحنی و خطهای $x=4$ و $x=\lambda$ را محاسبه کنید.

c) حد این سطح را وقتی که λ بسمت بی نهایت میل می کند، بدست آورید.

۳۸۸. اگر $f'(x)$ و $F(x)$ به ترتیب مشتق و تابع اولیه $f(x)$ و ضمناً $F(0)=0$ باشد؛ $f(x)$ را پیدا کنید، بشرطی که داشته باشیم:

$$F[f'(x)] = 216x^3 - 252x^2 + 102x - 14$$

۷.

منحنی‌های درجهٔ دوم

(مقاطع مخروطی)

اگرچه هم در کارهای ریاضی دانهای یونان باستان و هم در نوشته‌های ریاضی دانهای اسلامی بحث دربارهٔ مقاطع مخروطی (البته به زبان هندسی) دنبال شده است؛ ولی بررسی دقیق و منظم این مبحث از ریاضیات، تنها وقتی جدی تلقی شد، که نظم بطلمیوسی مطالعهٔ حرکت‌های آسمانی درهم ریخت و جای خود را به بررسی واقعیتها سپرد. معلوم شد که سیاره‌ها روی بیضی به دور خورشید حرکت می‌کنند و خورشید در یکی از کانونهای این بیضی قرار دارد؛ معلوم شد سنگی که پرتاب می‌شود روی قوسی از سهمی پیش می‌رود، معلوم شد که بعضی از ستاره‌های دنباله‌دار روی قوسی از هذلولی حرکت می‌کنند و ... و همه اینها مستلزم این بود که بیضی و سهمی و هذلولی را بهتر بشناسند.

روشن است که کار توضیح خاصیت‌های هندسی این منحنی‌ها مربوط به این کتاب نیست و ما در اینجا تنها به تحلیل جبری معادلهٔ آنها (آنها) تاجائی که به برنامه دبیرستانی مربوط باشد) می‌پردازیم. طبیعی است که مثل سایر فصلهای این کتاب، تنها به نکته‌هایی اشاره خواهیم کرد که برای خواننده کم و بیش تازگی داشته باشد و در کتابهای درسی کمتر به آنها برخورد نماید.

۱. صورت کلی منحنی‌های درجه دوم

در هندسه، تعریف کلی يك مقطع مخروطی (دو خط راست، دایره، بیضی، هذلولی ویاسهمی) را به این صورت می‌دهند: مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که نسبت فاصله‌های آنها از يك خط و يك نقطه ثابت، مقدار ثابتی باشد، مقطع مخروطی نامیده می‌شود. یعنی این مکان، بسته به جای نقطه و خط ثابت و بسته به مقدار نسبت ثابت، یکی از مقطعهای مخروطی را خواهد داد.

اگر خط ثابت $ax + by + c = 0$ و نقطه ثابت را (α, β) را در نظر بگیریم، معادله مکان هندسی نقطه $M(x, y)$ ، که نسبت فاصله‌هایش از خط و نقطه، مساوی مقدار ثابت λ است، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{(ax + by + c)^2}{(a^2 + b^2)[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]} = \lambda^2$$

و همانطور که دیده می‌شود، این يك معادله کامل درجه دوم، نسبت به x و y ، است. در هندسه تحلیلی ثابت می‌کنند، که برعکس، هر معادله‌ای که نسبت به x و y درجه دوم باشد، معادله يك مقطع مخروطی را (حقیقی یا موهومی)، بیان می‌کند.

به این ترتیب، معادله کلی يك مقطع مخروطی به صورت زیر است:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \quad (1)$$

در حالت $b = 0$ ، تابع $y = f(x)$ ، که از (۱) بدست می‌آید، يك ارزشی و

گویا و در حالت $b \neq 0$ ، تابع $y = f(x)$ ، دو ارزشی و گنگ است. ابتدا به حالت $b = 0$ می‌پردازیم:

$$۱) \quad b = c = 0 ; \quad y = -\frac{1}{e}(ax^2 + dx + f)$$

این تابع برای ما آشناست و عبارتست از معادله یک سهمی که محوری موازی محور عرض دارد. مشخصات این سهمی (کانون، خط هادی، محور) را بعداً (ضمن تمرینها) بررسی خواهیم کرد.

$$۲) \quad b = 0 \text{ و } c \neq 0 ; \quad y = -\frac{ax^2 + dx + f}{cx + e}$$

که معادله یک هذلولی است و در هر حال مجانبی موازی محور عرض دارد $(x = -\frac{e}{c})$. در حالتی که $a = 0$ باشد، این هذلولی متساوی الساقین می‌شود

و مجانب دوم آن $(y = -\frac{d}{c})$ موازی محور طول می‌شود و در حالت $a \neq 0$ ،

$$\text{معادله مجانب دوم به صورت } y = \frac{a}{c}x + \frac{dc - ae}{c^2} \text{ در می‌آید.}$$

به این ترتیب، اگر از حالت دو خط بگذریم از بین مقاطعهای مخروطی، تنها سهمی و هذلولی را می‌توان، در حالت خاص، به صورت $y = f(x)$ نمایش داد که در آن $f(x)$ نسبت به x گویا باشد و به ازای هر مقدار مشخص x ، تنها یک مقدار برای y بدست آید.

البته، معادله (۱) با فرض $b = 0$ ، ممکن است در حالت خاص به دو خط راست تجزیه شود. برای تحقق این وضع باید در معادله زیر، ریشه‌های x نسبت به y گویا باشد:

$$ax^2 + (cy + d)x + (ey + f) = 0$$

مبین این معادله چنین است:

$$\Delta = (cy + d)^2 - 4a(ey + f) = c^2 y^2 + 2(cd - 2ae)y + (d^2 - 4af)$$

و برای اینکه این عبارت نسبت به y مجذور کامل باشد، باید مبین آن مساوی صفر شود:

$$(cd - 2ae)^2 - c^2(d^2 - 4af) = 0 \Rightarrow ae^2 - cde + c^2f = 0$$

و شرط اینکه عبارت اخیر بتواند مساوی صفر بشود، اینست که $d^2 > 4af$ باشد. بنابراین با شرطهای:

$$\begin{cases} ae^2 - cde + c^2f = 0 \\ d^2 - 4af > 0 \end{cases}$$

و شرط اصلی $b = 0$ ، معادله (۱) به دو خط راست تجزیه می‌شود که یکی از آنها خطی موازی محور عرض است. بطور کلی کافی است، معادله (۱) را نسبت به x منظم کنیم و در معادله درجه دومی که بدست می‌آید، x را بر حسب y محاسبه کنیم، چنانچه، معادله مفروض قابل تجزیه به دو خط راست باشد، x نسبت به y مقداری گویا خواهد شد.

مثلاً اگر در معادله:

$$4x^2 + 2mxy + 10x + 3my + 6 = 0 \quad (I)$$

x را بر حسب y بدست آوریم، خواهیم داشت:

$$4x^2 + 2(my + 5)x + 3(my + 2) = 0;$$

$$x = \frac{-(my + 5) \pm \sqrt{(my + 5)^2 - 12(my + 2)}}{4} =$$

$$= \frac{-(my + 5) \pm \sqrt{(my - 1)^2}}{4} = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}(my + 2) \end{cases}$$

و بنابراین معادله (I) به دو خط زیر تجزیه می‌شود:

$$\begin{cases} 2x+3=0 \\ 2x+my+2=0 \end{cases}$$

اکنون به بررسی معادله (۱)، در حالت $b \neq 0$ ، می‌پردازیم؛ معادله (۱) را نسبت به y منظم می‌کنیم:

$$by^2 + (cx + e)y + (ax^2 + dx + f) = 0$$

y را بر حسب x محاسبه می‌کنیم:

$$y = -\frac{1}{2b}[(cx + e) \pm \sqrt{(cx + e)^2 - 4b(ax^2 + dx + f)}]$$

که آنرا بطور خلاصه، می‌توان چنین نوشت:

$$y = mx + n \pm \sqrt{px^2 + qx + r} \quad (2)$$

در حالت $p < 0$ ، حدود تغییرات x محدود می‌شود و منحنی تابع اصلاً شاخه بی‌نهایت ندارد و بنابراین منحنی نمایش تغییرات تابع دایره یا بیضی است.

در حالت $p > 0$ ، منحنی تابع ازدو جهت ($x \rightarrow -\infty$ و $x \rightarrow +\infty$) دارای شاخه بی‌نهایت است و بسادگی می‌توان ثابت کرد که دارای دو مجانب هم می‌باشد و بنابراین منحنی نمایش تغییرات تابع، یک هذلولی است.

در این حالت، اگر عبارت زیر رادیکال، نسبت به x ، مجذور کامل باشد، یعنی داشته باشیم: $q^2 = 4pr$ ، مقدار y نسبت به x گویا می‌شود و تابع به صورت دو خط راست درمی‌آید.

در حالت $p = 0$ ، منحنی تابع تنها از یک جهت ($x \rightarrow -\infty$ یا $x \rightarrow +\infty$)، شاخه بی‌نهایت دارد و ضمناً این شاخه بی‌نهایت مجانبی هم ندارد و بنابراین سهمی است.

ضمناً روشن است که در حالت منفی بودن p ، برای اینکه منحنی تابع (۲) یک دایره باشد، باید $p = -1$ و $m = 0$ شود.

بطور خلاصه، هر تابع به صورت (۲)، يك مقطع مخروطی است و نوع مقطع مخروطی را می‌توان با توجه به جدول زیر باز شناخت:

$$p > 0 \begin{cases} q^2 - 4pr \neq 0 & \text{هذلولی} \\ q^2 - 4pr = 0 & \text{دو خط راست} \end{cases}$$

$$p < 0 \begin{cases} (p+1)^2 + m^2 = 0 & \text{دایره} \\ (p+1)^2 + m^2 \neq 0 & \text{بیضی} \end{cases}$$

$$p = 0 \quad \text{سه می}$$

البته در هر يك از این حالتها (به استثنای حالت دو خط راست و حالت سه می)، ممكن است يك تابع موهومی بدست آید، بنابراین به آنها باید شرط $q^2 - 4pr > 0$ را، اضافه کرد تا منحنی تابع، هذلولی یا دایره یا بیضی حقیقی باشد.

مثال ۱. مطلوبست شرطهای لازم و کافی، برای اینکه منحنی تابع:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \quad (1)$$

يك دایره حقیقی باشد.

حل. می‌دانیم که معادله دایره به مرکز (α, β) و شعاع مساوی R چنین است:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

و این به معنای آنست که شرط لازم برای اینکه، معادله (۱) به صورت دایره در آید، اینست که داشته باشیم:

$$a = b \text{ و } c = 0$$

در این صورت، معادله (۱) چنین می‌شود:

$$ax^2 + ay^2 + dx + ey + f = 0$$

و یا:

$$x^2 + y^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}y + \frac{f}{a} = 0$$

و بالاخره:

$$\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{2a}\right)^2 = \frac{d^2 + e^2 - 4af}{4a^2}$$

و این معادله دایره‌ای است به مرکز $\left(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2a}\right)$ و شعاع

$R = \frac{1}{2a} \sqrt{d^2 + e^2 - 4af}$ روشن است که برای حقیقی بودن دایره باید

داشته باشیم: $d^2 + e^2 - 4af \geq 0$ (در حالت $d^2 + e^2 - 4af = 0$ ، دایره،

یک نقطه تبدیل می‌شود). بنابراین شرطهای لازم و کافی، برای اینکه، معادله

(۱) به دایره تبدیل شود، اینست که داشته باشیم:

$$a = b \text{ و } c = 0 \text{ و } d^2 + e^2 \geq 4af$$

مثال ۲. مطلوبست معادله محورو اصلی دو دایره به مرکزهای $\omega(\alpha, \beta)$ و

$$R' \text{ و } \omega'(\alpha', \beta')$$

حل. $M(x, y)$ را یکی از نقطه‌های محور اصلی می‌گیریم. باید نقطه

M از دو دایره یک قوت باشد، یعنی داشته باشیم:

$$M\omega^2 - R^2 = M\omega'^2 - R'^2$$

و یا:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - R'^2$$

که پس از ساده کردن چنین می‌شود:

$$2(\alpha - \alpha')x + 2(\beta - \beta')y = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha'^2 - \beta'^2 - R^2 + R'^2$$

یعنی برای پیدا کردن معادله محورو اصلی دو دایره، کافی است بین معادله‌های دو

دایره، جمله‌های درجه دوم را حذف کنیم.

مثلاً فرض کنید که بخواهیم، معادله وتر مشترک دو دایره متقاطع زیر را

پیدا کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

اگر معادله دوم را از معادله اول کم کنیم، معادله وتر مشترک دو دایره بدست می‌آید:

$$2x + y = 5$$

۲. وقتی که مقطع مخروطی، محوری، موازی محور طول دارد

بسادگی می‌توان ثابت کرد که اگر در معادله

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

$c = 0$ باشد، خط $y = -\frac{e}{2b}$ محور تقارن منحنی مقطع مخروطی است. همچنین

اگر در تابع:

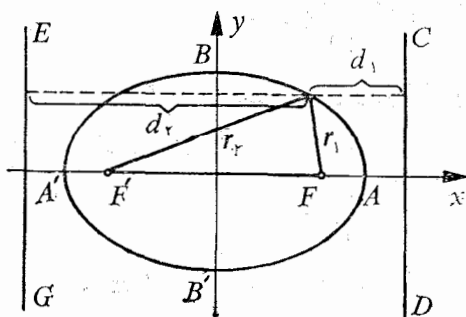
$$y = mx + n \pm \sqrt{px^2 + qx + r}$$

$m = 0$ شود، خط $y = n$ محور تقارن منحنی آن (که یک مقطع مخروطی است)، می‌شود.

بنابراین در هر یک از دو وضع فوق، اگر منحنی بیضی یا هذلولی باشد، محورهایی به موازی محورهای مختصات دارد و اگر منحنی، سهمی باشد، محور آن موازی محور طول است. و ما در اینجا به بررسی هریک از این سه منحنی در این حالت خاص، می‌پردازیم.

I. بیضی

بیضی عبارتست از مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه، که مجموع فاصله‌های آنها تا دو نقطه ثابت، مقدار ثابتی باشد. دو نقطه ثابت را **کانونهای بیضی**



شکل ۶۳

گویند و مقدار ثابت را به $2a$ و فاصله بین دو کانون را به $2c$ نشان می‌دهند (شکل ۶۳). از هندسه می‌دانیم که بیضی دارای دو محور تقارن و یک مرکز تقارن است. مرکز تقارن بروسط پاره خط FF' و F و F' کانونهای بیضی اند و محورها یکی منطبق بر امتداد FF' و دیگری امتداد عمود منصف پاره خط FF' است. ضمناً بسادگی معلوم می‌شود که قطر بزرگتر بیضی، یعنی AA' مساوی مقدار ثابت $2a$ است و در این صورت اگر طول قطر کوچکتر بیضی را $2b$ فرض کنیم، رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین آنها برقرار است.

ساده‌ترین معادله بیضی. امتداد قطر بزرگتر بیضی را محور طول و امتداد قطر کوچکتر آنرا محور عرض می‌گیریم، در این صورت، مرکز بیضی بر مبدا مختصات منطبق می‌شود و خواهیم داشت:

$$F(c, 0) \text{ و } F'(-c, 0)$$

اگر نقطه‌ای از بیضی را $M(x, y)$ فرض کنیم، بنا بر تعریف بیضی و محاسبه‌ای که در صفحه ۴۳ (مثال ۳) انجام دادیم، معادله بیضی به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (۱)$$

از اینجا بسادگی می‌توان به معادله بیضی، در دو حالت کلی‌تر زیر رسید:

۱. اگر مرکز بیضی $\omega(\alpha, \beta)$ و قطر بزرگتر AA' آن موازی محور طول باشد، معادله آن چنین است:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

۲. اگر مرکز بیضی $\omega(\alpha, \beta)$ و قطر بزرگتر آن AA' موازی محور عرض باشد، معادله آن چنین است:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{b^2} + \frac{(y - \beta)^2}{a^2} = 1$$

(مقادیر b و a با توجه به نامساوی $a > b$ ، باز شناخته می‌شوند).

خروج از مرکز بیضی عبارتست از نسبت فاصله کانونی ($2c$) بر طول قطر

بزرگتر $(2a)$ ، و به e نشان داده می‌شود:

$$e = \frac{c}{a}$$

و روشن است که در بیضی $e < 1$.

فاصله هر نقطه $M(x, y)$ از کانونهای بیضی را شعاع حاملهای کانونی

بیضی گویند و به r_1 و r_2 نشان می‌دهند:

$$r_1 = a - ex \quad \text{و} \quad r_2 = a + ex$$

خط هادی بیضی عبارتست از خطی موازی قطر کوچکتر، بنحوی که

فاصله آن تا این قطر مساوی $\frac{a}{e}$ باشد (روی شکل ۶۳، خطهای EG و CD).

معادله خطهای هادی بیضی (۱)، چنین است.

$$x = \frac{a}{e} \quad \text{و} \quad x = -\frac{a}{e}$$

نسبت فاصله هر نقطه بیضی تا کانون به فاصله آن نقطه تا خطهای نظیر آن کانون، برابر است با خروج از مرکز بیضی:

$$\frac{r_1}{d_1} = e \quad \text{و} \quad \frac{r_2}{d_2} = e$$

بنابراین، می‌توان بیضی را مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه دانست که نسبت

فاصله آن از یک نقطه ثابت بر فاصله آن تا یک خط ثابت، مساوی مقدار ثابتی کوچکتر از واحد باشد.

معادله مماس بر بیضی (۱) را در نقطه $M(x_1, y_1)$ می‌توان به اینصورت

نوشت:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

مثال ۳. معادله هریک از مماس مشترکهای دو بیضی زیر را پیدا کنید:

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

حل. معادله مماس مشترک دو بیضی را $y = mx + n$ می‌گیریم، در

اینصورت هریک از دو دستگاه زیر باید جواب مضاعف داشته باشند:

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 = 6 \\ y = mx + n \end{cases} ; \begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ y = mx + n \end{cases}$$

اگر y را بین دو معادله هریک از دو دستگاه حذف کنیم، دو معادله درجه دوم نسبت به x بدست می آید:

$$(6m^2 + 1)x^2 + 12mnx + 6(n^2 - 1) = 0$$

$$(4m^2 + 9)x^2 + 8mnx + 4(n^2 - 9) = 0$$

و اگر شرط وجود ریشه مضاعف را برای هریک از این دو معادله بنویسیم، به دستگاه دو معادله زیر، نسبت به مجهولهای m و n ، می رسم:

$$\begin{cases} 6m^2 - n^2 + 1 = 0 \\ 4m^2 - n^2 + 9 = 0 \end{cases}$$

که از حل آن چهار جواب بدست می آید:

$$\begin{vmatrix} m=2 \\ n=5 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} m=2 \\ n=-5 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} m=-2 \\ n=5 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} m=-2 \\ n=-5 \end{vmatrix}$$

و بنابراین معادله مماس مشترکها چنین است:

$$2x + y \pm 5 = 0 \quad \text{و} \quad 2x - y \pm 5 = 0$$

مثال ۴. مطلوبست معادله بیضی که در نقطه $(0, 3)$ بر محور عرض مماس

باشد و محور طول را در نقطه های $(3, 0)$ و $(7, 0)$ قطع کند، بشرطی که محورهای بیضی موازی با محورهای مختصات باشد. مختصات کانونهای این بیضی را هم پیدا کنید.

حل. روشن است که یکی از محورهای بیضی از نقطه تماس آن با محور عرض، یعنی $(0, 3)$ می گذرد و محور دیگر آن، عمود منصف وتر است که محور طول در بیضی به وجود می آورد (زیرا محورهای بیضی، موازی محورهای مختصات است). بنابراین معادله یکی از محورها $y = 3$ و معادله دیگری $x = 5$ می شود. از اینجا مختصات مرکز بیضی $\omega(5, 3)$ خواهد شد. فاصله این مرکز تا نقطه

$(0, 3)$ ، مقدار a را می‌دهد، که مساوی ۵ می‌شود. به این ترتیب، معادله بیضی به این صورت در می‌آید:

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

که با قراردادن مختصات یکی از دو نقطه برخورد بیضی با محور طول، در معادله (۱)، مقدار b^2 برابر با $\frac{75}{4}$ بدست می‌آید:

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{\frac{75}{4}} = 1$$

با در دست داشتن مقادیر a^2 و b^2 می‌توان مقدار c را محاسبه کرد:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - \frac{75}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

کانونها روی قطر بزرگتر قرار دارند و بنابراین هم عرض با مرکز بیضی هستند. برای محاسبه طول کانونها داریم:

$$x_F = x_\omega - c = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

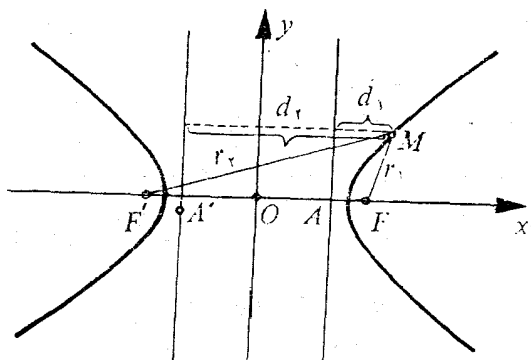
$$x_{F'} = x_\omega + c = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\text{جواب: } F\left(\frac{5}{2}, 3\right) \text{ و } F'\left(\frac{15}{2}, 3\right)$$

II. هذلولی

هذلولی عبارتست از مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه، که تفاضل فاصله‌های آنها از دو نقطه ثابت، مقدار ثابتی باشد. دو نقطه ثابت را **کانونها**ی هذلولی گویند. مقدار ثابت را به $2a$ و فاصله دو کانون را به $2c$ و $c^2 - a^2$ را به b^2 نشان می‌دهند (شکل ۶۴).

هذلولی دارای دو محور تقارن و یک مرکز تقارن است. مرکز تقارن هذلولی



شکل ۶۴

بر وسط پاره خط FF' و F و F' کانونهای هذلولی اند) و محورها، یکی منطبق بر FF' (محور قاطع هذلولی) و دیگری امتداد عمود منصف FF' (محور غیر قاطع) است. ضمناً بسادگی معلوم می شود که مقدار ثابت هذلولی، یعنی $2a$ ، مساوی طول پاره خط AA' (فاصله دو رأس هذلولی) است.

ساده ترین معادله هذلولی، امتداد FF' را محور طول و امتداد عمود منصف آنرا محور عرض می گیریم، در این صورت مبدا مختصات بر مرکز هذلولی منطبق می شود و خواهیم داشت:

$$F(c, 0) \text{ و } F'(-c, 0)$$

اگر نقطه ای از هذلولی را $M(x, y)$ فرض کنیم، بنا بر تعریف هذلولی و محاسبه ای که در مسأله ۴۴ (صفحه ۵۶) انجام دادیم، معادله هذلولی به این صورت درمی آید:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

از اینجا می توان بسادگی، به معادله هذلولی در دو حالت کلی تر زیر رسید:

۱. اگر مرکز هذلولی $\omega(\alpha, \beta)$ و محور قاطع آن موازی محور طول باشد،

معادله آن چنین است:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

۲. اگر مرکز هذلولی $\omega(\alpha, \beta)$ و محور قاطع آن موازی محور عرض باشد.

معادله آن چنین است:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

در هذلولی هر سه حالت $a > b$ و $a = b$ و $a < b$ ممکن است. اگر

$a = b$ باشد، هذلولی را متساوی‌الساقین گویند.

خروج از مرکز هذلولی عبارتست از نسبت فاصله بین دو کانون (۲c) بر

فاصله بین دورأس حقیقی (۲a) هذلولی:

$$e = \frac{c}{a}$$

و روشن است که در هذلولی $e > 1$.

هذلولی (۱) از دو شاخه (شاخه راست و شاخه چپ) تشکیل شده است که

تا بی‌نهایت ادامه دارند. برای نقطه‌های شاخه راست، شعاع‌های حامل کانونی

از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$r_1 = ex - a \text{ و } r_2 = ex + a$$

$$r_2 - r_1 = 2a$$

و برای نقطه‌های شاخه چپ داریم:

$$r_1 = -ex + a \text{ و } r_2 = -ex - a$$

$$r_1 - r_2 = 2a$$

خط‌های هذلولی عبارتست از خطی عمود بر محور کانونی و به فاصله

$\frac{a}{e}$ از مرکز. معادله خط‌های هادی هذلولی (۱) چنین است:

$$x = \frac{a}{e} \text{ و } x = -\frac{a}{e}$$

نسبت فاصله هر نقطه از هذلولی تا کانون به فاصله این نقطه تا خط هادی نظیر این کانون، برابر است با خروج از مرکز هذلولی:

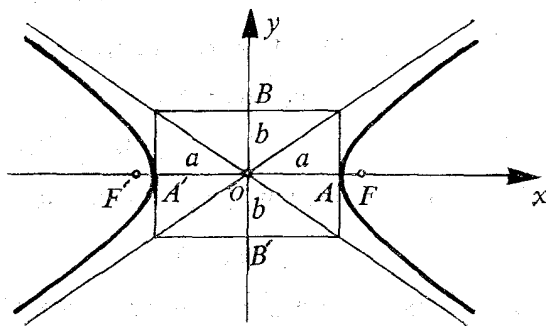
$$\frac{r_1}{d_1} = e \text{ و } \frac{r_2}{d_2} = e$$

بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که نسبت فاصله آن تا يك نقطه ثابت، بر فاصله آن تا يك خط ثابت مساوی مقدار ثابتی بزرگتر از واحد باشد، يك هذلولی است.

معادله مماس بر هذلولی به معادله (۱) را در نقطه (x_1, y_1) ، می‌توان به این صورت نوشت:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

مستطیل مجانبیها. از هندسه می‌دانیم که اگر از رأسهای A و A' هذلولی،



مماس‌هایی بر آن رسم کنیم تا مجانبهای هذلولی را قطع کنند؛ از وصل نقطه‌های تلاقی به یکدیگر مستطیلی بدست می‌آید که آنرا مستطیل مجانبها گویند (شکل ۶۵). این مستطیل بیشتر مشخصات هذلولی را در خود دارد: امتداد قطرهای آن مجانبهای هذلولی، محورهاى آن، محورهاى هذلولی و مرکز آن، مرکز هذلولی است. دو بعد مستطیل مقادیر $2a$ و $2b$ و طول قطر آن مقدار $2c$ را مشخص می‌کند. با وجود این، اگر مستطیل مجانبها را داشته باشیم، دو هذلولی بدست می‌آید که در مجانبها و محورها مشترکند؛ منتهی، محور قاطع یکی، محور غیر قاطع دیگری است و بنابراین اگر مقدار ثابت هذلولی اول $2a$ باشد، مقدار ثابت هذلولی دوم مساوی $2b$ می‌شود. این دو هذلولی را **هذلولیهای مزدوج** گویند. بسادگی معلوم می‌شود که اگر معادلهٔ يك هذلولی به صورت زیر باشد:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

معادلهٔ هذلولی مزدوج آن چنین می‌شود:

$$\frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$$

از شکل ۶۵ پیداست که ضریب زاویه‌های مجانبهای هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

عبارتست از $\pm \frac{b}{a}$ و بنابراین معادلهٔ این مجانبها چنین می‌شود:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

و بطور کلی در حالتی که معادلهٔ هذلولی به صورت (۲) باشد، معادلهٔ مجانبهای آن چنین می‌شود:

$$\frac{x-\alpha}{a} \pm \frac{y-\beta}{b} = 0$$

مثال ۵. یکی از کانونهای يك هذلولی به عرض مساوی ۵ و معادلهٔ مجانبهای آن $2x + y = 7$ و $2x - y = 1$ است. معادلهٔ هذلولی و معادلهٔ هذلولی مزدوج آنرا بنویسید و آنها را در يك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

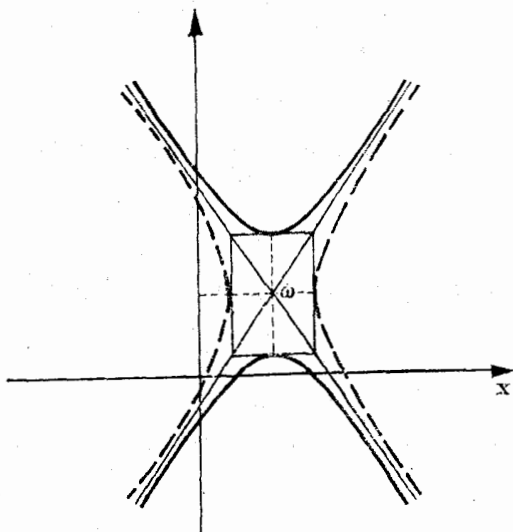
حل. مرکز هذلولی، محل تلاقی مجانبهای آنست:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \omega \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

از طرف دیگر، چون ضریب زاویه‌های دو مجانب، قرینهٔ یکدیگرند. نیمسازهای زاویه‌های بین دو مجانب، موازی محورهای مختصات می‌شود. نیمسازهای زاویه‌های دو مجانب، همان محورهای هذلولی هستند، بنابراین معادلهٔ محورهای هذلولی عبارتست از $x = 2$ و $y = 3$. عرض کانون F مساوی ۵ است و بنابراین روی خط $x = 2$ قرار دارد و مختصات این کانون $F(2, 5)$ می‌شود.

فاصلهٔ ωF ، مقدار c را بدست می‌دهد: $c = 2$ و بنابراین داریم:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4$$



شکل ۶۶

ضمناً چون امتداد ωF (یعنی محور قاطع هذلولی) موازی محور عرض است،

ضریب زاویهٔ مجانبها برابر $\pm \frac{a}{b}$ می‌شود و داریم:

$$\frac{a}{b} = 2$$

به این ترتیب مقادیر a و b از دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ \frac{a}{b} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{16}{5} \\ b^2 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

و معادلهٔ هذلولی چنین می‌شود:

$$\frac{(y-3)^2}{\frac{16}{5}} - \frac{(x-2)^2}{\frac{4}{5}} = 1$$

و معادلهٔ هذلولی مزدوج آن:

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{4}{5}} - \frac{(y-3)^2}{\frac{16}{5}} = 1$$

و یا:

$$\begin{cases} y = 3 \pm 2\sqrt{x^2 - 4x + \frac{24}{5}} & \text{(معادلهٔ هذلولی)} \\ y = 3 \pm 2\sqrt{x^2 - 4x + \frac{16}{5}} & \text{(معادلهٔ هذلولی مزدوج)} \end{cases}$$

برای رسم هذلولی کافی است مرکز و محورهای هذلولی را رسم کنیم و به کمک مقادیر a و b ، مستطیل مجانبها را بدست آوریم. در این صورت بادر دست داشتن رأسهای حقیقی و مجانبهای هذلولی، بسادگی می‌توان آنرا رسم کرد (در شکل ۶۶، هذلولی مزدوج، خط چین رسم شده است).

مثال ۶. هذلولی $y = \frac{x^2}{x+1}$ مفروض است: (۱) مختصات رأسها و

کانونهای این هذلولی را پیدا کنید. (۲) معادله هذلولی مزدوج آنرا بنویسید.

حل. (۱) معادله مجانبهای این هذلولی عبارتست از $x = -1$ و

$y = x - 1$. محل برخورد این دو مجانب، یعنی $(-1, -2)$ ، مرکز هذلولی

است. محورهای هذلولی، همان نیمسازهای مجانبهای آنست و بنابراین بسادگی

معادله محورها بدست می آید:

$$y = (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} - 1 \quad (\text{محور قاطع})$$

$$y = -(\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} - 1 \quad (\text{محور غیر قاطع})$$

رأسهای هذلولی از برخورد محور قاطع، با خود هذلولی، یعنی از حل دستگاه دو

معادله دومجهولی زیر، بدست می آید:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{x+1} \\ y = (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

اگر رأسهای هذلولی را A و A' فرض کنیم، مختصات آنها چنین است:

$$A \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}(2 - \sqrt[4]{8}) \\ \frac{1}{4}(\sqrt[4]{8} + 2\sqrt{2} - 4) \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad A' \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}(2 + \sqrt[4]{8}) \\ -\frac{1}{4}(\sqrt[4]{8} + 2\sqrt{2} + 4) \end{vmatrix}$$

روشن است که رأسهای حقیقی هذلولی، غیر از نقطه‌های ماکزیمم و می نیمم

منحنی آنست (نقطه‌های ماکزیمم و می نیمم منحنی این هذلولی، روی دستگاه

محورهای مختصات، عبارتند از $M(0, 0)$ و $N(-2, -3)$).

با در دست داشتن مختصات مرکز و رأسها، می توان مقدار ثابت هذلولی را

پیدا کرد:

$$a^2 = \omega A^2 = \left[\frac{1}{4}(\sqrt[4]{8} + 2\sqrt{2} - 4) + 2 \right]^2 +$$

$$+ \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(2 - \sqrt{2}) + 1 \right]^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + 2\sqrt{2})^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 2(\sqrt{2} + 1)$$

برای محاسبه مقدار b ، باید مماس در یکی از رئوسهای حقیقی هذلولی را رسم کرد و روی این مماس، فاصله نقطه تماس تا محل برخورد مماس با مجانب را بدست آورد (خاصیت مستطیل مجانبها). معادله مماس بر هذلولی در رأس A را پیدا می‌کنیم. این مماس بر محور قاطع هذلولی عمود است و بنابراین ضریب زاویه آن مساوی $(\sqrt{2} - 1)$ می‌شود. با در دست داشتن نقطه تماس و ضریب زاویه خط مماس، معادله آن را می‌نویسیم:

$$y = -(\sqrt{2} - 1)x + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 \quad (\text{مماس در رأس } A)$$

مختصات محل برخورد این مماس با مجانب $x = -1$ را پیدا می‌کنیم. اگر این نقطه برخورد را P بنامیم، خواهد شد:

$$P(-1, 2\sqrt{2} - 2)$$

و از آنجا بسادگی مقدار b^2 بدست می‌آید:

$$b^2 = AP^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 4) - 2\sqrt{2} + 2 \right]^2 + \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(2 - \sqrt{2}) + 1 \right]^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2 + \frac{1}{4}(\sqrt{2})^2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

اگر فاصله دو کانون هذلولی را $2c$ بگیریم، داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4(\sqrt{2} + 1)^2 + 4(\sqrt{2} - 1)^2 = 24$$

کانون هذلولی روی محور قاطع است، و بنابراین اگر طول این نقطه را α بگیریم، عرض آن مساوی $\sqrt{2} - 1 + (\sqrt{2} + 1)\alpha$ می‌شود؛ چون F مساوی c (نصف فاصله کانونی) است، بنابراین:

$$\omega F' = c' \Rightarrow [(\sqrt{2} + 1)(\alpha + 1)]^2 + (\alpha + 1)^2 = 24,$$

$$(\alpha + 1)^2 = \frac{24}{2(2 + \sqrt{2})} = 6(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = -1 \pm \sqrt{6(2 - \sqrt{2})}$$

و در نتیجه مختصات کانونهای هذلولی بسادگی بدست می آید:

$$F \begin{vmatrix} -1 + \sqrt{6(2 - \sqrt{2})} \\ -2 + \sqrt{6(2 + \sqrt{2})} \end{vmatrix}, F' \begin{vmatrix} -1 - \sqrt{6(2 - \sqrt{2})} \\ -2 - \sqrt{6(2 + \sqrt{2})} \end{vmatrix}$$

۲) مجانبهای هذلولی مزدوج هم، همان خطهای $y = x - 1$ و $x = -1$ است. بنابراین معادله هذلولی مزدوج به این صورت است:

$$y = \frac{(x+1)(x-1) + m'}{x+1} = \frac{x^2 + m}{x+1}$$

مقدار ثابت يك هذلولی، یعنی $2a$ ، همان مقدار $2b$ در هذلولی مزدوج آنست. بنابراین برای هذلولی مزدوج داریم:

$$a^2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

ضمناً معادله محور قاطع در این هذلولی مزدوج چنین است (همان محور غیر قاطع در هذلولی اصلی):

$$y = -(\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} - 1$$

از حل معادله محور قاطع با معادله هذلولی، مختصات رأسهای هذلولی مزدوج بدست می آید:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 + m}{x+1} \\ y = -(\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x + m + \sqrt{2} + 1 = 0$$

واز آنجا:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-2 \pm \sqrt{-2\sqrt{2}(m+1)} \right)$$

و مختصات یکی از رأسها چنین می‌شود:

$$A \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(2 + \sqrt{-2\sqrt{2}(m+1)} \right) \\ -2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2} - 1) \sqrt{-2\sqrt{2}(m+1)} \end{vmatrix}$$

که با توجه به مختصات مرکز این هذلولی: $\omega(-1, -2)$ ، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} a^2 = \omega A^2 &= \frac{1}{4} (\sqrt{2} - 1)^2 [-2\sqrt{2}(m+1)] + \\ &+ \frac{1}{4} [-2\sqrt{2}(m+1)] = -\frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} - 1)^2 (m+1) - \\ &- \frac{\sqrt{2}}{4} (m+1) = -2(\sqrt{2} - 1)(m+1) \end{aligned}$$

که اگر این مقدار را مساوی مقدار a^2 قرار دهیم، m بدست می‌آید:

$$-2(\sqrt{2} - 1)(m+1) = 2(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow m = -2$$

و در نتیجه، معادله هذلولی مزدوج چنین است:

$$y = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$$

III. سهمی

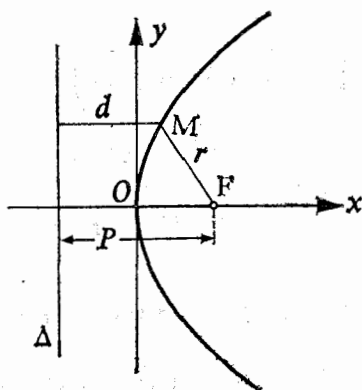
سهمی مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه است که از يك نقطه ثابت (کانون

سهمی) و يك خط ثابت (خط هادی سهمی)، يك فاصله باشند.

فاصله کانون تا خط هادی سهمی را به p نشان می‌دهند و پارامتر سهمی

می‌نامند.

ساده‌ترین معادله سهمی. اگر امتداد خطی را که از کانون سهمی بر خط



شکل ۶۷

هادی آن عمود می‌شود، محور طول و وسط فاصله کانون تا خط هادی را مبدا مختصات بگیریم (شکل ۶۷)، بسادگی معلوم می‌شود (مسأله ۴۶ صفحه ۵۶ را ببینید) که معادله سهمی به این صورت درمی‌آید:

$$y^2 = 2px$$

در این حالت، محور طول، تنها محور سهمی و مبدا مختصات، رأس سهمی خواهد بود.

روشن است که اگر، رأس سهمی را $S(\alpha, \beta)$ و محور آنرا موازی محور طول بگیریم، برای معادله سهمی خواهیم داشت:

$$(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$$

و اگر محور سهمی را موازی محور عرض بگیریم:

$$(x - \alpha)^2 = 2p(y - \beta)$$

بسادگی می‌توان ثابت کرد، که اگر تقعر منحنی سهمی بطرف جهت مثبت محور طول یا عرض باشد، ضریب $2p$ ، در طرف دوم معادله سهمی، مثبت و در حالت عکس، منفی خواهد بود.

هر خطی موازی با محور سهمی، تنها آنرا در یک نقطه قطع می‌کند و هر

خطی که بامحور سهمی موازی نباشد، دو نقطه برخورد (حقیقی یا موهومی) با سهمی خواهد داشت.

در سهمی $y^2 = 2px$ ($p > 0$)، شعاع کانونی هر نقطه از سهمی برابر است با:

$$r = x + \frac{p}{2}$$

و معادله مماس بر این سهمی، در نقطه (x_1, y_1) به این صورت درمی‌آید:

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

مثال ۷. کانون يك سهمی $F(2, 1)$ و معادله Δ خط هادی آن $y = 3$ است. معادله سهمی را پیدا کنید.

حل. چون خط هادی سهمی، موازی محور طول و در نتیجه، محور سهمی موازی محور عرض است، معادله سهمی به این صورت خواهد بود:

$$(x - \alpha)^2 = 2p(y - \beta)$$

از طرف دیگر وضع استقرار کانون نسبت به خط هادی، روشن می‌کند که تقعر سهمی بسمت جهت منفی محور عرض است و بنابراین ضریب $2p$ در سمت راست تساوی عددی منفی خواهد بود.

رأس سهمی، وسط پاره خط عمودی است که از F بر خط Δ فرود آید. پای این عمود $H(2, 3)$ و بنابراین وسط پاره خط FH (رأس سهمی) $S(2, 2)$ می‌شود. از طرف دیگر، قدر مطلق مقدار p برابر است با فاصله کانون از خط هادی، یعنی ۲. به این ترتیب معادله سهمی مورد نظر چنین می‌شود:

$$(x - 2)^2 = -4(y - 2)$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 1 \quad \text{و یا:}$$

مثال ۸. $F(1, 0)$ کانون و $y = x + 1$ (Δ)، معادله خط هادی يك سهمی است:

(a) معادله سهمی را بنویسید و مختصات نقطه ماکزیمم منحنی آنرا

پیدا کنید.

(b) اگر محورهای مختصات را به اندازه ۴۵ درجه دورمبداء و درجهت مثلثاتی دوران دهیم، بدون استفاده از رابطه‌های مربوط به دوران محورها، معادله جدید سهمی را پیدا کنید.

حل. محور سهمی در امتداد عمودی است که از قانون برخط هادی فرود آید و بنابراین ضریب زاویه‌ای مساوی ۱- و معادله‌ای به اینصورت دارد:

$$y = -x + 1 \quad (\text{محور سهمی})$$

از حل معادله محور سهمی با معادله خط هادی، مختصات نقطه H ، پای عمودی که از F بر Δ فرود آید، بدست می‌آید: $H(0, 1)$ ، در نتیجه، مختصات رأس S ، وسط FH چنین می‌شود: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. ضمناً بسادگی معلوم می‌شود که در این

سهمی: $p = \sqrt{2}$.

(a) برای پیدا کردن معادله سهمی، یکی از نقطه‌های آنرا $M(x, y)$ می‌گیریم؛ اگر فاصله این نقطه از خط هادی را d فرض کنیم، باید داشته باشیم:

$$d = MF$$

$$MF^2 = (x-1)^2 + y^2, \quad d^2 = \frac{(x-y+1)^2}{2};$$

$$(x-1)^2 + y^2 = \frac{(x-y+1)^2}{2};$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y + 1 = 0$$

$$y = -x - 1 \pm 2\sqrt{2x} \quad (1) \quad \text{و یا:}$$

بسادگی معلوم می‌شود که تابع $y = -x - 1 - 2\sqrt{2x}$ همواره نزولی و تابع $y = -x - 1 + 2\sqrt{2x}$ ماکزیمی به مختصات $(1, 2)$ دارد.

(b) وقتی که محورهای مختصات را درجهت مثلثاتی و به اندازه ۴۵ درجه

دوران دهیم، در دستگاه جدید XOY ، محور طول موازی خط هادی سهمی و محور عرض موازی محور سهمی می شود (زیرا خط هادی با جهت مثبت محور طول در دستگاه قدیم، زاویه ای مساوی 45° درجه می سازد). ضمناً جهت تقعر سهمی در دستگاه جدید بطرف جهت منفی محور عرض است. بنابراین معادله این سهمی چنین است:

$$(x - \alpha)^2 = 2p(y - \beta) \quad (p < 0)$$

مقدار p ، که معرف يك فاصله است، در دو دستگاه قدیم و جدید یکی است، یعنی $p = \sqrt{2}$. در دستگاه محورهای جدید، محور طول از نقطه S ، رأس سهمی، می گذرد (زیرا $S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ روی نیمساز ربع اول در دستگاه قدیم قرار داشت). فاصله این نقطه تا مبدا مساوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است و بنابراین در دستگاه جدید :

$S(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ می شود. به این ترتیب معادله جدید سهمی چنین خواهد بود:

$$(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = -2\sqrt{2}y$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{8} \quad \text{و یا:}$$

تمرین

۳۸۹. در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، مطلوبست مختصات رأس و کانون و معادله خط هادی.

۳۹۰. ثابت کنید منحنی تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ ، يك هذلولی است. (b)

مختصات مرکز، رأسهای حقیقی، کانونها و معادله مجانبها و محورهای این هذلولی را بنویسید. (c) ثابت کنید مکان هندسی نقطه هایی از صفحه محورهای مختصات که از آنجا بتوان دو مماس عمود برهم بر این هذلولی رسم کرد، دایره ای است

به شعاع صفر (دایره مؤثر). (d) معادله هذلولی مزدوج این هذلولی را بنویسید.

(e) محورهای مختصات را به اندازه $\frac{3\pi}{4}$ در جهت مثلثاتی، دور مبدأ مختصات، دوران داده‌ایم، بدون استفاده از رابطه‌های مربوط به دوران، معادله جدید هذلولی را بنویسید.

(۳۹۱ a) ثابت کنید ساده‌ترین معادله بیضی، هذلولی و سهمی‌رانی توان به اینصورت نوشت:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + D = 0$$

(b) طبق تعریف، قطریک منحنی درجه دوم عبارتست از مکان هندسی وسط وترهای متوازی. در اینصورت ثابت کنید که قطریک منحنی درجه دوم، یک خط راست است. وضع قطر را در هریک از حالت‌های رابره، بیضی، هذلولی و سهمی بررسی کنید. اگر طبق تعریف قبول کنیم که: دو قطر را مزدوج هم گویند که هریک از آنها، وترهای موازی دیگری را نصف کند، رابطه بین ضریب زاویه قطرهای مزدوج را در هر یک از حالت‌های بیضی، هذلولی و سهمی پیدا کنید.

۳۹۲. این دو بیضی مفروض است:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

ثابت کنید قطرهای مزدوج بیضی اول (با امتداد آنها)، بیضی دوم را در نقطه‌هایی قطع می‌کند که مماس در آنها برهم عمودند.

۳۹۳. خطی از کانون هذلولی عبور کرده است. از رأس‌های هذلولی، مماسهایی بر هذلولی رسم کرده‌ایم تا این خط را در نقطه‌های P و Q قطع کنند. ثابت کنید، دایره به قطر PQ بر هذلولی مماس است.

۳۹۴. سه رأس متوالی یک لوزی بترتیب روی ضلع‌های AB، BC و CD از مربع مفروضی به ضلع مساوی واحد، قرار گرفته‌اند. مطلوب است محاسبه مساحت شکلی که با جابجاشدن سه رأس این لوزیها به وسیله رأس چهارم به وجود آمده است.

۳۹۵. هذلولی متساوی‌الساقین γ به مرکز O داده شده است:

(۱) نقطه P را روی هذلولی انتخاب کرده‌ایم. به مرکز P شعاع مساوی

۲OP دایره‌ای رسم کرده‌ایم. ثابت کنید که این دایره، هذلولی را در چهار نقطه قطع می‌کند که سه تا از آنها، رأسهای يك مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

(۲) مثلث متساوی‌الاضلاعی پیدا کنید که سه رأس آن بر هذلولی متساوی‌الساقین مفروض واقع و یکی از راههای آن معلوم باشد.

۳۹۶. سه نقطه C, B, A روی هذلولی متساوی‌الساقینی داده شده است. از نقطه A خطی موازی قطر نظیر وترهای موازی BC رسم می‌کنیم. بهمین ترتیب از نقطه‌های C و B هم خطهایی رسم می‌کنیم. ثابت کنید، سه خطی که به این ترتیب رسم شوند، روی دایره محیطی مثلث ABC بهم می‌رسند.

۳۹۷. معادله کلی منحنی‌های درجه دوم را در نظر می‌گیریم:

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

ثابت کنید، مرکز تقارن منحنی این تابع (در صورت وجود)، از محل دستگاه‌زیر، نسبت به مجهولهای y و x ، بدست می‌آید:

$$f'_x = 0 \text{ و } f'_y = 0$$

(f'_x)، یعنی مشتق $f(x, y)$ نسبت به x ، به شرطی که y را ثابت فرض کنیم)، از اینجا نتیجه بگیرید که اگر معادله منحنی درجه دوم را به این صورت بنویسیم:

$$\bar{y} = mx + n \pm \sqrt{px^2 + qx + r}$$

مختصات مرکز تقارن: $(-\frac{q}{2p}, n - \frac{mq}{2p})$ می‌شود.

۳۹۸. ثابت کنید که در منحنی درجه دوم

$$y = mx + n \pm \sqrt{px^2 + qx + r} \quad (p > 0)$$

اگر معادله مجانبها را به صورت $y = ax + b$ بگیریم، داریم:

$$a = m \pm \sqrt{p}; \quad b = \pm \frac{q}{2\sqrt{p}} + n$$

۳۹۹. منحنی تابع $y^2 = ax^2 + bx + c$ را بررسی کنید.

۴۰۰. خط d به معادله $(m^2 - 1)x - 2my + 4(m^2 + 1) = 0$

مفروض است.

(۱) مطلوبست مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات، که از هر کدام آنها، تنها یکی از خطهای (d) می‌گذرد. ناحیه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات را پیدا کنید که از آنجا دو خط از خطهای d بگذرد و یا خطی عبور نکند. (۲) اگر M نقطه‌ای از صفحهٔ محورهای مختصات باشد. که از آنجا دو نمونه

از خطهای d بگذرد، ثابت کنید که هر دو خط بر مکان قسمت اول مماس‌اند.

(۳) مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه را پیدا کنید که دو خطی از آنجا از نوع خطهای d می‌گذرد، برهم عمود باشند.

۴۰۱. معادلهٔ دایره‌ای را پیدا کنید که از سه نقطهٔ $A(0, 2)$ ، $B(1, 1)$ و $C(2, -2)$ بگذرد.

۴۰۲. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $C(5, 4)$ مرکز آن و ضمناً بردایرهٔ $x^2 + y^2 = 4x + 5$ مماس خارج باشد.

۴۰۳. با چه شرطی، این دودایره برهم عمودند:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R'^2 \end{cases}$$

۴۰۴. مختصات مرکز تجانس این دودایره را پیدا کنید:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0 \end{cases}$$

۴۰۵. معادلهٔ هر يك از مماس مشترکهای این دودایره را بنویسید:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 ; (x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

۴۰۶. مطلوبست محاسبهٔ طول مماسی که از نقطهٔ $M(2, 6)$ بر دایرهٔ

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

ثابت کنید، معادلهٔ

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 + \lambda[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R'^2] = 0$$

نمایش يك دسته دایره است. عدد λ چه نسبتی را مشخص می‌کند؟

۴۰۸. معادله دایره‌ای را پیدا کنید که از نقطه $(-3, 1)$ عبور کند و با

دو دایره

$$(x-5)^2 + y^2 = 5 \quad \text{و} \quad x^2 + (y-10)^2 = 130$$

يك محورا صلی داشته باشد.

۴۰۹. در بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، مثلث A_1MA_2 را محاط کرده‌ایم.

ضلع A_1A_2 ، از این مثلث بر قطر بزرگتر بیضی منطبق است و رأس M روی محیط بیضی حرکت می‌کند. مطلوبست مکان هندسی مرکز ثقل این مثلث.

۴۱۰. نقطه P روی محیط دایره $x^2 + y^2 = R^2$ حرکت می‌کند.

نقطه متغیر M چنانست که همیشه عرض نقطه P را به نسبت λ تقسیم می‌کند. مطلوبست مکان نقطه M .

۴۱۱. میله $OP = p$ با سرعت زاویه‌ای ω دور نقطه O (مبداء مختصات)

می‌چرخد. میله دیگر $PQ = q$ هم با سرعت زاویه‌ای ω دور نقطه P می‌چرخد، مطلوبست مسیر نقطه Q ، به شرطی که در لحظه شروع حرکت، هر دو میله بر محور طول منطبق باشند و نقطه P بین دو نقطه Q و O قرار گرفته باشد. حالت‌های $p > q$ ، $p < q$ و $p = q$ را توضیح دهید.

۴۱۲. دو انتهای پاره خطی به طول ثابت، روی ضلع‌های زاویه قائمه‌ای

حرکت می‌کنند. مطلوبست مکان نقطه M واقع بر این پاره خط. اگر نقطه M بر امتداد پاره خط انتخاب شود، مکان آن چیست؟

۴۱۳. مختصات رأس‌های مثلث ABC داده شده است: $A(0, 0)$ ،

$C(-2, 2)$ ، $B(2, 2)$ نقطه M چنان حرکت می‌کند که مجموع مربعات فاصله‌های آن از سه ضلع مثلث، همواره برابر مقدار ثابت ۱۶ است. مکان M را پیدا کنید.

۴۱۴. مطلوبست مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از نقطه $A(3, 0)$

بگذرند و بر دایره $x^2 + y^2 = 25$ مماس باشند.

$$۴۱۵. \text{ معادلهٔ هذلولی را بنویسید که از کانونهای بیضی } \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

بگذرد و رأسهای این بیضی، کانونهای آن باشند.

$$۴۱۶. \text{ هذلولی } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{ داده شده است. مطلوبست:}$$

(۱) مختصات کانونها و رأسهای هذلولی،

(۲) معادلهٔ مجانبها و خطهای هادی،

(۳) محاسبهٔ خروج از مرکز آن،

(۴) معادلهٔ هذلولی مزدوج و محاسبهٔ خروج از مرکز آن.

$$۴۱۷. \text{ معادلهٔ مجانبهای يك هذلولی } y = \pm \frac{1}{4}x \text{ است. این هذلولی از}$$

نقطهٔ $M(12, 3/\sqrt{3})$ می‌گذرد، معادلهٔ آنرا پیدا کنید.

$$۴۱۸. \text{ روی هذلولی } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, \text{ نقطه‌ای پیدا کنید که:}$$

(۱) شعاع بردارهای کانونی آن برهم عمود باشند.

(۲) فاصلهٔ آن از کانون چپ دو برابر فاصلهٔ آن از کانون راست باشد.

$$۴۱۹. \text{ خروج از مرکز هذلولی } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ چه شرطی داشته باشد،}$$

تا روی شاخهٔ راست آن نقطه‌ای يك فاصله از کانون راست و خط هادی چپ، وجود داشته باشد؟

۴۲۰. ثابت کنید که حاصلضرب فاصله‌های هر نقطهٔ هذلولی تا دو مجانب

آن، مقداری است ثابت.

$$۴۲۱. \text{ قطری از هذلولی } 9x^2 - 16y^2 = 576 \text{ را پیدا کنید که طولی}$$

مساوی ۲۰ داشته باشد.

$$۴۲۲. \text{ از نقطهٔ } A(3, -1), \text{ وتری از هذلولی } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \text{ رسم کنید}$$

که در این نقطه نصف شود.

۴۲۳. معادله هذلولی را بنویسید که بر خط $5x - 6y - 8 = 0$ مماس

و معادله مجانبهای آن $y = \pm \frac{1}{3}x$ باشد.

۴۲۴. ثابت کنید که اگر بیضی و هذلولی، کانونهای مشترک داشته باشند، برهم عمودند، یعنی مماسهای بدو منحنی در هر یک از نقطه‌های برخورد، برهم عمودند.

۴۲۵. ثابت کنید، حاصلضرب فاصله‌های دو کانون هذلولی، از مماس بر آن، مقداری است ثابت.

۴۲۶. دوميله، در دو جهت مخالف، دور نقطه‌های ثابت A و B طوری می‌چرخند، که همیشه با خط AB، زاویه‌هایی متمم یکدیگر می‌سازند. مطلوبست مکان هندسی نقطه برخورد دوميله.

۴۲۷. مطلوبست مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از دایره $2a^2 + 2b^2 = 1$ جدا می‌کنند.

۴۲۸. ثابت کنید، مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر یک دایره مفروض مماس خارج باشند و از نقطه مفروض بگذرند، یک هذلولی است.

۴۲۹. طول ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاعی را پیدا کنید که در سهمی $y^2 = 2px$ محاط باشد.

۴۳۰. مطلوبست کوتاهترین فاصله سهمی $y^2 = 64x$ از خط

$$4x + 3y + 46 = 0$$

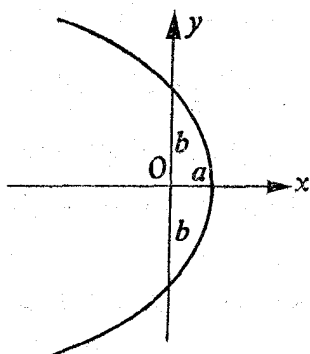
۴۳۱. معادله مماسهای مشترک بیضی $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ و سهمی

$$y^2 = \frac{20}{3}x$$
 را پیدا کنید:

۴۳۲. ثابت کنید، اگر کانونها و امتداد محورهای دو سهمی برهم‌منطبق،

ولی جهت تقعر دوسهمی برخلاف یکدیگر باشد، دو سهمی برهم عمودند.

۴۳۳. معادله سهمی را بنویسید که محور طول، محور تقارن آن باشد و روی



شکل ۶۸

محور طول پاره خط $+a$ و روی محور عرض پاره خطهای $\pm b$ را جدا کند (شکل ۶۸).

۴۳۴. يك پل چنان ساخته شده است كه قوس دهانه آن، قوسی از يك سهمی است. اگر طول دهانه پل ۲۴ متر و ارتفاع آن ۶ متر باشد، پارامتر سهمی را پیدا کنید.

۴۳۵. معادله منحنی درجه دومی را بنویسید که از نقطه‌های $(0,0)$ ، $(0,2)$ ، $(-1,0)$ ، $(-2,1)$ و $(-1,3)$ می‌گذرد.

۴۳۶. معادله منحنی درجه دومی را بنویسید که از مبدا مختصات بگذرد و بر خط $4x + 3y + 2 = 0$ در نقطه $(1, -2)$ و بر خط $x - y - 1 = 0$ در نقطه $(0, -1)$ مماس باشد.

۴۳۷. معادله خطهایی را بنویسید که از مبدا مختصات بگذرد و با منحنی $6x^2 - xy - y^2 + 5x - 3y + 2 = 0$ تنها يك نقطه برخورد داشته باشند.

۴۳۸. خطهایی که تنها در يك نقطه، منحنی

$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ را قطع می‌کنند، چه زاویه‌ای با محور طول می‌سازند؟

حل مسأله‌ها

روش مختصات

۱. $AB=5$ می‌شود. اگر $C(x,y)$ بگیریم داریم:

$$AC = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} ;$$

$$BC = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

و چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، باید داشته باشیم $AC=BC=AB$.
 $AB=5$ است و بنابراین به دستگاه دو معادله دوجوهولی زیر می‌رسیم^۱.

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 25 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases} \quad (1)$$

از تفاضل این دو معادله، به معادله درجه اول $6x + 8y = 11$ و یا معادله

$$y = \frac{11-6x}{8} \text{ می‌رسیم. اگر این مقدار } y \text{ را در یکی از دو معادله دستگاه (۱)}$$

و مثلاً معادله اول، قراردهیم، پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$4x^2 - 4x - 47 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

(۱) معادله‌های این دستگاه عبارتند از معادله‌های دایره‌هایی به شعاع ۵ و به مرکزهای A و B . و روشن است که نقطه C یکی از نقطه‌های برخورد این دو دایره است.

و در نتیجه دوجواب برای نقطهٔ C بدست می‌آید:

$$C_1 \left(\frac{1+4\sqrt{3}}{2}, \frac{2-3\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$C_2 = \left(\frac{1-4\sqrt{3}}{2}, \frac{2+3\sqrt{3}}{2} \right)$$

مساحت هریک از مثلثهای ABC_1 و ABC_2 چنین می‌شود:

$$S = \frac{1}{2} \left| \left(-6 + \frac{1-3\sqrt{3}}{2} \times \frac{3-4\sqrt{3}}{2} + \frac{-3\sqrt{3}}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{3+4\sqrt{3}}{2} \right) \right| = \frac{25}{4}\sqrt{3}$$

روشن است که در اینجا می‌شد مساحت مثلث را با توجه به رابطهٔ

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

بدست آورد:

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \sin 60^\circ = \frac{25}{4}\sqrt{3}$$

۲. مختصات رأس C را (x, y) فرض کنید و دو معادلهٔ زیر را تشکیل دهید:

$$\begin{cases} CA = CB \\ CA^2 + CB^2 = AB^2 \end{cases}$$

که پس از ساده کردن چنین می‌شود:

$$\begin{cases} 8x - 6y + 7 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-4)^2 = \frac{25}{2} \end{cases}$$

(۱) معادلهٔ اول این دستگاه، معادلهٔ خط عمود منصف AB و معادلهٔ دوم،

معادلهٔ دایره به مرکز A (یا B) و به شعاع $\frac{25}{\sqrt{2}}$ است.

جواب: $C_1(\frac{5}{4}, \frac{9}{4})$ و $C_2(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

۳. مختصات (x, y) رأس C ازدستگاه زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{cases} AC=AB \\ AB^2+AC^2=BC^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)^2+(y-1)^2=13 \\ x^2+(y-2)^2=26 \end{cases}$$

جواب: $C_1(5, 4)$ و $C_2(1, -2)$

۴. نسبت به نیمساز ربع اول وسوم:

$A_1(2, 4)$ و $B_1(1, -3)$ و $C_1(-2, 0)$

و نسبت به نیمساز ربع دوم وچهارم:

$A_2(-2, -4)$ و $B_2(-1, 3)$ و $C_2(2, 0)$

۵. این همان مسأله ۲، منتهی به زبان دیگری است.

جواب: $B(-4, 2)$ و $D(-1, 1)$

۶. (a) مجموعه نقطه‌های واقع بر محورهای مختصات.

(b) مجموعه نقطه‌های واقع در ربع اول وسوم (نقطه‌های واقع بر محورها

عضوهای این مجموعه نیستند).

(c) نقطه‌های واقع در ربع دوم و چهارم (نقطه‌های روی محورها استثنا

هستند).

(d) مجموعه نقطه‌های واقع بر نیمساز ربع اول وسوم.

(e) مجموعه نقطه‌های واقع در سمت چپ نیمساز ربع اول وسوم به استثنای

نقطه‌های واقع بر این نیمساز (استدلال کنند).

(f) نقطه‌های واقع بر نیمساز ربع دوم و چهارم به استثنای نقطه‌های واقع

(۱) معادله اول دستگاه، معادله دایره‌ای است به مرکز A و شعاع مساوی

طول AB و معادله دوم عبارتست از معادله دایره به مرکز B و شعاع مساوی $AB/\sqrt{2}$.

نقطه C یکی از نقطه‌های برخورد این دو دایره است.

برخود این نیمساز.

(g) مجموعه نقطه‌های واقع در سمت راست نیمساز ربع دوم و چهارم بجز نقطه‌های واقع بر خود این نیمساز (استدلال کنید).

(h) تنها مبداء مختصات.

(i) نقطه‌های واقع بر نیمسازهای چهار مربع.

(j) مجموعه همه نقطه‌های صفحه محورهای مختصات به استثنای مبداء مختصات.

(k) مجموعه نقطه‌های واقع در سمت چپ نیمساز ربع دوم و چهارم (بجز نقطه‌های واقع بر خود نیمساز).

(l) مجموعه نقطه‌های واقع در سمت راست نیمساز اول و سوم. نقطه‌های واقع بر خود نیمساز جزو مجموعه نیست.

(m) این معادله را می‌توان به سادگی چنین نوشت:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$$

و روشن است که تنها مختصات نقطه $(1, -2)$ در آن صدق می‌کند.

(n) معادله هم نسبت به x و هم نسبت به y از درجه دوم است. مثلاً نسبت به y منظم می‌کنیم:

$$29y^2 + 2(17x+7)y + (10x^2 + 8x + 2) = 0$$

مبین این معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\Delta &= (17x+7)^2 - 29(10x^2 + 8x + 2) = \\ &= -x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2\end{aligned}$$

که تنها در حالت $x=3$ منجر به جواب حقیقی $y=-2$ می‌شود. به این ترتیب تنها مختصات نقطه $(3, -2)$ در این معادله صدق می‌کند.

(o) این معادله نسبت به y دو مجذوری است، بهمین مناسبت آنرا

نسبت به y منظم می‌کنیم (معادله نسبت به x برای ماقابل حل نیست):

$$y^4 + 2(x^2 - 5)y^2 + (x^4 - 9x^2 - 4x + 29) = 0$$

که برای محاسبه y^2 به این مبین می‌رسیم:

$\Delta = (x^2 - 5)^2 - (x^2 - 9x^2 - 4x + 29) = -(x - 2)^2$
 و بنابراین تنها $x = 2$ قابل قبول است که به ازای آن $y = \pm 1$ بدست می آید.
 به این ترتیب مختصات دو نقطه $(2, 1)$ و $(2, -1)$ در این معادله صدق می کند.
 (p) برای حقیقی بودن y باید داشته باشیم:

$$\log \cos x > 0 \Rightarrow \cos x > 1$$

و چون $\cos x$ نمی تواند از واحد بزرگتر شود، تنها $\cos x = 1$ قابل قبول است
 که در این صورت $y = 0$ می شود.

جواب: مجموعه نقطه های $(2k\pi, 0)$ که در آن k عدد صحیح دلخواهی است.

(q) جواب: مجموعه نقطه های $(0, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$ که در آن k عدد صحیح دلخواهی است.

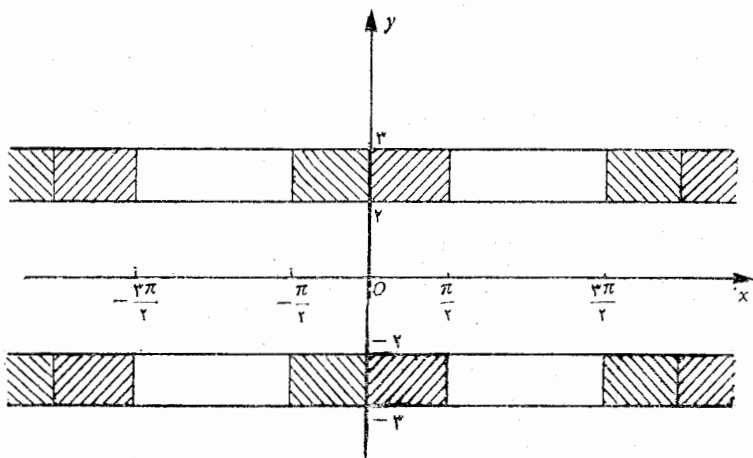
(r) می دانیم مبنای لگاریتم نمی تواند منفی یا صفر یا واحد باشد، بنا بر این باید داشته باشیم $0 < \cos x < 1$ ؛ از طرف دیگر لگاریتم عدد منفی یا صفر بی معناست، یعنی $0 < |y| - 2$ ؛ همچنین لگاریتم یک عدد در مبنای عدد کوچکتر از واحد وقتی مثبت است که مقدار جلو لگاریتم کوچکتر از واحد باشد، یعنی $0 < |y| - 2$. به این ترتیب باید این شرطها برقرار باشد:

$$\begin{cases} 0 < \cos x < 1 \\ 2 < |y| < 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, x \neq 2k\pi \\ 2 < y < 3, -3 < y < -2 \end{cases}$$

مجموعه نقطه های جواب در شکل ۶۹ نشان داده شده است.

(8) دو نقطه $(1, 0)$ و $(-1, 0)$.



شکل ۶۹

۷. جواب: $D(-3, 2)$ ، $B(0, 5)$

۸. این مسأله منجر به مسأله ۵ می‌شود، زیرا اگر قرینه نقطه A نسبت به

ω را پیدا کنیم، انتهای دیگر قطر AC بدست می‌آید.

جواب: $D(6, 3)$ ، $C(7, -4)$ ، $B(0, -5)$

۹. دستگاه‌های زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = 0 \\ x_A + x_B = -2 \\ x_B + x_C = -6 \end{cases} ; \begin{cases} y_A + y_C = -2 \\ y_A + y_B = 6 \\ y_B + y_C = -4 \end{cases}$$

و از آنجا بدست می‌آید: $A(2, 4)$ ، $B(-4, 2)$ ، $C(-2, -6)$ ؛ $S = 26$

۱۰. جواب: $C(0, 2)$

۱۱. مقدمه. qp را دو عدد طبیعی می‌گیریم که نسبت بهم اول باشند.

دو حکم زیر روشن است: ۱°. هر عدد صحیح را می‌توان به صورت $px + qy$

نوشت، بشرطی که x و y دو عدد صحیح باشند (زیرا، اگر qp نسبت بهم اول

و x و y دو عددی صحیح باشند، معادله $px + qy = n$ همیشه دارای جواب

است) ۲°. اگر یک عدد به دو صورت $px' + qy' = px'' + qy''$ وجود

داشته باشد داریم: $x' - x'' = kp$ و $y' - y'' = kq$ که در آنها k عدد

صحیح دلخواهی است (روشن است که از تساوی $px' + qy' = px'' + qy''$ بدست می آید: $\frac{x' - x''}{y'' - y'} = \frac{q}{p}$ و چون qp نسبت بهم اولند نتیجه می شود:

$$(y'' - y' = kp \text{ و } x' - x'' = kq).$$

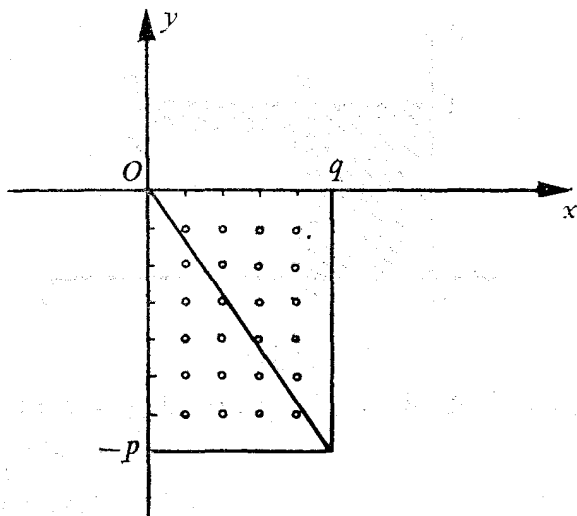
ضمناً وقتی که qp نسبت بهم اول، و y و x عددهای صحیح غیر منفی باشند، عدد صحیحی که به صورت $px + qy$ نوشته شود، عدد خوب و عدد صحیحی را که به این صورت نتوان نوشت، عدد بد می گویند.

حالا به حل مسأله می پردازیم .

از حکم اول و دوم مقدمه نتیجه می شود که اگر x_0 و y_0 دو عدد صحیح و qp نسبت بهم اول باشند، هر عدد صحیح دلخواه را تنها یک طریق می توان به صورت $n = px_0 + qy_0$ نشان داد، بشرطی که $0 < x_0 < q$ باشد. بنابراین اگر در این نمایش عدد y_0 غیر منفی باشد، n عدد خوب است و اگر y_0 عددی منفی باشد، n عدد بد است.

به این ترتیب، تعداد عددهای طبیعی که بتوان آنها را به صورت $px + qy$ (عددهای صحیح غیر منفی) نوشت، برابر است با تعداد زوج عددهای صحیح (x_0, y_0) که در شرطهای $0 < x_0 < q$ و $y_0 < 0$ و $px_0 + qy_0 > 0$ صدق کنند.

سادگی می توان این زوج عددها را شمرد، زیرا آنها متناظرند با نقطه هایی از صفحه محوره های مختصات Oxy ، که مختصات آنها عددهایی صحیح است و در داخل مثلث به رأسهای $(0, 0)$ ، $(q, -p)$ ، $(q, 0)$ قرار گرفته اند (شکل ۷۵). اگر قرینه این مثلث را هم در نظر بگیریم، تعداد نقطه های با مختصات صحیح داخل مستطیل $(0, 0)$ ، $(0, -p)$ ، $(q, -p)$ ، $(q, 0)$ دو برابر تعداد نقطه های داخل مثلث مذکور خواهد بود (روی قطر این مستطیل نقطه ای وجود ندارد، زیرا qp نسبت بهم اولاند). تعداد نقطه های داخل این مستطیل هم مساوی $(q-1)(p-1)$ است.



شکل ۷۰

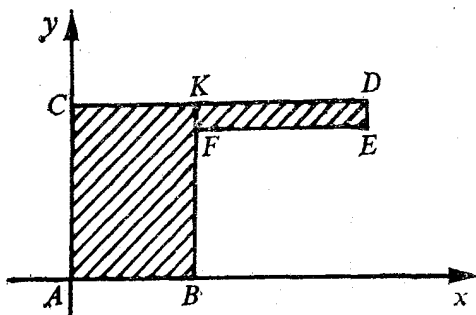
$$\text{جواب: } \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

۱۲. جواب: $M(5/5, 4/75)$ ، راهنمایی: ابتدا مرکز ثقل دو نقطه A و B را پیدا کنید، سپس مرکز ثقل این نقطه و نقطه C را بدست آورید.
۱۳. جواب:

$$\begin{cases} x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{cases}$$

۱۴. مرکز ثقل مستطیل $ABKC$ (شکل ۷۱) بسادگی بدست می‌آید:
- $M_1(5, 7)$ ، همچنین مرکز ثقل مستطیل $KDEF$ $M_2(17, 13)$.

نسبت جرم‌های این دو مستطیل (به علت یکنواخت بودن هر یک از آنها) متناسب با نسبت مساحت‌های آنهاست: $5:1 = 140:28$ و دیگر بسادگی مختصات مرکز ثقل بدست می‌آید: $M(7, 8)$.



شکل ۷۱

۱۵. اگر نقطه مجهول را $C(x, 0)$ بگیریم، باید A و B و C بر یک خط راست واقع باشند.

جواب: $C(-5, 0)$

۱۶. برای متوازی الاضلاع بودن چهار ضلعی، کافی است ثابت کنیم: $AB = CD$ و $BC = AD$ ، برای محاسبه ارتفاع، ابتدا مساحت متوازی الاضلاع را که دو برابر مساحت مثلث ABC است بدست می آوریم: $h = 2/2$.

۱۷. (اولا) بسادگی ثابت می شود که ضریب زاویه خط AB مقداری است

ثابت و بستگی به مقدار m ندارد:

$$\text{ضریب زاویه خط } AB = \frac{m + 2 - (2m + 1)}{4m - 3 - m} = \frac{-(m - 1)}{3(m - 1)} = -\frac{1}{3}$$

یعنی خط AB با تغییر m به موازات خط جابجا می شود.

ثانیاً) برای اینکه مثلثهای CAB متشابه بایکدیگر باشند، باید خطهای CA و CB هم به موازات خود حرکت کنند، یعنی ضریب زاویه های ثابتی داشته باشند؛ طول و عرض نقطه C را y و x می گیریم، در این صورت:

$$\text{ضریب زاویه خط } CA = \frac{2m - (y - 1)}{m - x}$$

$$\text{ضریب زاویه خط } CB = \frac{m - (y - 2)}{4m - (x + 3)}$$

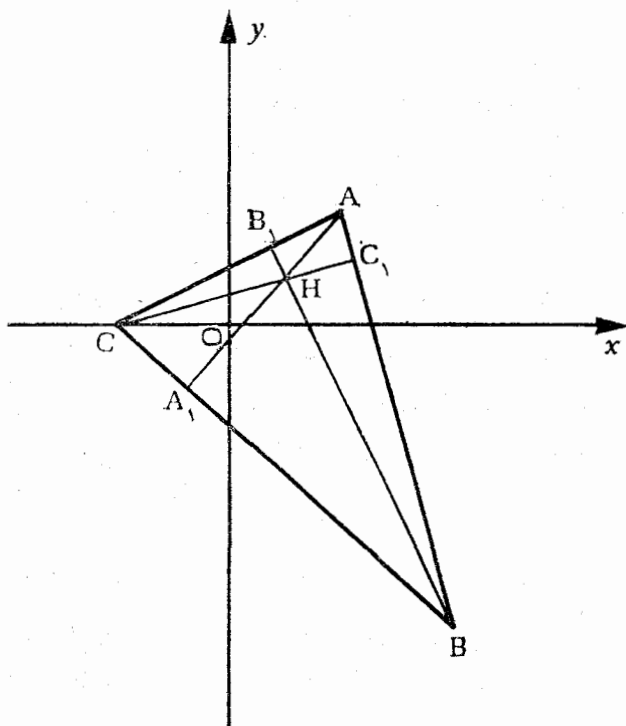
و برای اینکه هر يك از این کسرها به ازای همه مقادیر m مساوی مقدار ثابتی شوند (یعنی مقدار هر کسر به m بستگی نداشته باشد)، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{y-1}{x} = 2 \\ \frac{y-2}{x+3} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

یعنی اگر $C(1,3)$ باشد، CB و CA با تغییر m به موازات خود حرکت می‌کنند و در نتیجه مثلث‌های ABC بایکدیگر متشابه می‌شوند.

۱۸. C_1, B_1, A_1 را بترتیب پای ارتفاع‌های وارد از سه رأس C, B, A

و H را محل برخورد این ارتفاع‌ها می‌گیریم (شکل ۷۲).



شکل ۷۲

از مثلثهای قائم الزاویه BHC_1 و AHC_1 داریم:

$$HA^2 - AC_1^2 = HB^2 - BC_1^2$$

و از آنجا:

$$HA^2 - HB^2 = AC_1^2 - BC_1^2 \quad (۱)$$

همچنین از مثلثهای قائم الزاویه BCC_1 و ACC_1 :

$$AC^2 - AC_1^2 = BC^2 - BC_1^2$$

و یا:

$$AC_1^2 - BC_1^2 = AC^2 - BC^2 \quad (۲)$$

باتوجه به تساویهای (۱) و (۲) بدست می آید:

$$HA^2 - HB^2 = AC^2 - BC^2 \quad (۳)$$

و به همین ترتیب

$$HA^2 - HC^2 = AB^2 - BC^2 \quad (۴)$$

مختصات رأسهای مثلث و محل برخورد ارتفاعها را $B(x_2, y_2)$, $A(x_1, y_1)$

$C(x_3, y_3)$ و $H(x, y)$ می گیریم. در اینصورت رابطه های (۳) و (۴)

چنین می شود:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (x - x_2)^2 - (y - y_2)^2 = \\ = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 - (y_2 - y_3)^2 ; \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (x - x_2)^2 - (y - y_3)^2 = \\ = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 - (y_2 - y_3)^2 \end{cases}$$

که پس از ساده کردن به دستگاه زیر می نویسیم:

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y = x_2(x_2 - x_1) + y_2(y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1)y = x_2(x_3 - x_1) + y_2(y_3 - y_1) \end{cases}$$

و چنانچه مختصات سه رأس مثلث را درمورد حالت خاص در نظر بگیریم، جواب

این دستگاه (مختصات نقطه H) چنین می شود: $H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

خط راست - مکان هندسی - تقارن

۱۹. مختصات سه رأس مثلث بسادگی بدست می‌آید: $A(2, 5)$,

$B(0, -1)$, $C(7, 0)$ و از آنجا بدست می‌آید: $CA = CB = 5\sqrt{2}$.

۲۰. جواب: $y = (-1 \pm \sqrt{2})x$.

۲۱. راهنمایی: هر دو ضلع از نقطه $A(4, -1)$ می‌گذرند، یکی از آنها

با وتر زاویه‌ای مساوی ۴۵ درجه می‌سازد (مثلث متساوی‌الساقین است) و دیگری بر او لی عمود است.

جواب: $2x + y = 7$ و $x - 2y = 3$.

۲۲. جواب: ضلع دیگر مجاور به زاویه قائمه: $2x - 3y + 11 = 0$;

وتر: $x + 5y = 40$ یا $y = 5x - 18$.

۲۳. جواب: $3x + y = 2$; $x - 3y = 14$; $x - 3y + 16 = 0$;

و $3x + y = 32$.

۲۴. جواب: $(AB)y = 0$; $(BC)y = \sqrt{3}(x - a)$;

$y = \sqrt{3}(x + a)$; $(DE)y = a\sqrt{3}$; $(CD)y = -\sqrt{3}(x - 2a)$

$(FA)y = -\sqrt{3}x$; (EF)

۲۵. جواب: $(AB)4x + 3y = 27$; $(AC)x = 3$;

$(BC)7x - 3y = 39$.

۲۶. راهنمایی: برای پیدا کردن معادله هر يك از ضلعهای مثلث بزرگتر،

ابتدا مختصات سه رأس آنرا بدست آورید رأس A' روی MA قرار دارد و در

حالتی که A و A' در یکطرف M واقع باشند، نقطه A پاره خط MA' را به

نسبت ۲/۱ تقسیم می‌کند و وقتی که A و A' در دو طرف M قرار گیرند، نقطه

M پاره خط AA' را به نسبت ۳/۱ تقسیم می‌کند و در نتیجه دو جواب برای

A' و شبیه آن برای B' و C' بدست می‌آید.

جواب: $(B'C')x + 3y = 20$ ؛ $(A'B')2x - 5y = 18$ ؛
 $(A''B'')2x - 5y + 24 = 0$ یا $(C'A')3x - 2y = 5$ ؛
 $(C''A'')3x - 2y + 25 = 0$ ؛ $(B''C'')x + 3y + 34 = 0$.
 ۲۷ جواب: $2x + y - 2 = 0$ ؛ $x - 2y + 9 = 0$ ؛
 $x + 2y - 7 = 0$ ؛ $2x - y + 6 = 0$

۲۸ جواب: ۱) $\pm 4x + 3y - 12 = 0$ ؛

۲) $\pm 4x + \sqrt{33}y = 4\sqrt{33}$ ؛

۳) $x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} = 0$ ؛

۴) $5x - 3y = 12$

۲۹ جواب: $\frac{x}{\lambda a} + \frac{y}{\lambda b} = 1$ یعنی خطی موازی خط اول.

۳۰ راهنمایی: اگر این خطها بر یک دایره به مرکز مبدا مختصات مماس باشند، باید از مرکز یک فاصله باشند و این فاصله همان شعاع دایره و پای عمودهایی که از مرکز بر این خطها فرود آید نقطه‌های تماس اند.

جواب: $r = 5$ (شعاع دایره) ؛ $T(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\sqrt{5})$ و

$T'(-\frac{5}{6}\sqrt{11}, \frac{15}{6})$ (نقطه‌های تماس).

۳۱ اگر نقطه مجهول را $M(x, 0)$ بگیریم، باید فاصله آن از خط مفروض مساوی a باشد:

$$\frac{|bx - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = a \Rightarrow x = a \pm \frac{a}{b} \sqrt{a^2 + b^2}$$

۳۲ اگر ضریب زاویه خط را که از $P(-2, 1)$ می‌گذرد k بگیریم، معادله خط چنین می‌شود:

$$kx - y + 2k + 1 = 0$$

باید فاصله نقطه $C(3, 1)$ از این خط مساوی ۴ باشد، که پس از ساده کردن به

معادله زیر منجر می‌شود:

$$\frac{|\Delta k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 4 \Rightarrow k = \pm \frac{4}{3}$$

و معادله خط مطلوب $4x - 3y + 11 = 0$ یا $4x + 3y + 5 = 0$ می‌شود.

۳۳. باید نقطه‌ای را پیدا کرد که فاصله آن از هر دو خط مفروض مساوی

۸ باشد. مسأله چهار جواب دارد.

$$\text{جواب: } C_1\left(-\frac{5}{3}, 11\frac{1}{4}\right) ; C_2\left(-15, \frac{5}{4}\right) ;$$

$$C_3\left(11\frac{2}{3}, \frac{5}{4}\right) ; C_4\left(-\frac{5}{3}, -8\frac{3}{4}\right)$$

$$۳۴. \text{ جواب: } 8x - 15y = 10$$

۳۵. باید q و q' چنان انتخاب شوند که به ازای آنها دو معادله مفروض

نمایش يك خط راست باشند. دو معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} (q+1)x + y - (q+1) = 0 \\ 2x + (q'-3)y + q' = 0 \end{cases}$$

و برای اینکه این دو معادله نمایش يك خط باشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{q+1}{2} = \frac{1}{q'-3} = -\frac{q+1}{q'}$$

که از حل این دستگاه $q = -2$ و $q' = -2$ بدست می‌آید و به ازای

هر کدام از آنها به خط $2x - 5y - 2 = 0$ می‌رسیم.

$$۳۶. \text{ جواب: } x + y = 3$$

$$۳۷. \text{ جواب: } (1) \quad 14x - 43y + 29 = 0$$

$$(2) \quad 2x - 25y + 23 = 0$$

$$S = ۱۳\frac{۱}{۸} (۳ : M(\frac{۱۷}{۱۲}, \frac{۱۱}{۳}) (۲ : h = \frac{۲۱}{\sqrt{۱۷}} (۱ : \text{جواب: } ۳۸)$$

واحد مربع.

$$.M(\frac{۱۰}{۳}, \frac{۷}{۳}) : \text{جواب: } ۳۹$$

$$.۴۰ \text{ جواب: } ۷x - ۳y = ۹ \text{ و } ۳x - ۷y = ۱$$

$$۴۱. M(\alpha, \alpha) \text{ فرض می کنیم، مختصات نقطه های } C \text{ و } D \text{ بسادگی بر حسب}$$

α بدست می آیند:

$$C(0, \frac{2\alpha}{\alpha+2}) ; D(-\frac{2\alpha}{\alpha-2}, 0)$$

و معادله خط CD چنین می شود:

$$(\alpha-2)x - (\alpha+2)y + 2\alpha = 0$$

که می توان آنرا به این صورت نوشت:

$$(x-y+2)\alpha - 2(x+y) = 0$$

و برای اینکه نقطه ثابت این خط را پیدا کنیم، باید نسبت به α متحد صفر

بگیریم، یعنی

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

۴۲. نامساوی:

$$2\cos 2t + 4\sin 2x \sin t + 2\sin(x+y) - (\sin 2x - 1)^2 > 1$$

را به صورت زیر تبدیل می کنیم:

$$2 - 4\sin^2 t + 4\sin 2x \sin t + 2\sin(x+y) - \sin^2 2x + 2\sin 2x - 1 > 1$$

و یا:

$$2[\sin(x+y) + \sin 2x] - (2\sin t - \sin 2x)^2 > 0$$

اگر $\sin(x+y) + \sin 2x \leq 0$ باشد، سمت چپ نامساوی اخیر منفی می‌شود. ولی حالت:

$$\sin(x+y) + \sin 2x > 0 \quad (۱)$$

می‌تواند برقرار باشد، زیرا مثلاً به ازای مقادیر $t = \arcsin(\frac{1}{2} \sin 2x)$ بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} 2[\sin(x+y) + \sin 2x] - (2 \sin t - \sin 2x)^2 &= \\ &= 2[\sin(x+y) + \sin 2x] > 0 \end{aligned}$$

به این مختصات (x, y) ، همه نقطه‌هایی که در نامعادله (۱) صدق کنند، با شرط مسأله هم می‌سازد. نامعادله (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$\sin \frac{3x+y}{2} \cos \frac{y-x}{2} > 0$$

حالا توجه می‌کنیم که همه جوابهای نامعادله:

$$\sin \frac{3x+y}{2} > 0$$

چنین است:

$$4k\pi < 3x+y < 4k\pi + 2\pi$$

و همه جوابهای نامعادله:

$$\sin \frac{3x+y}{2} < 0$$

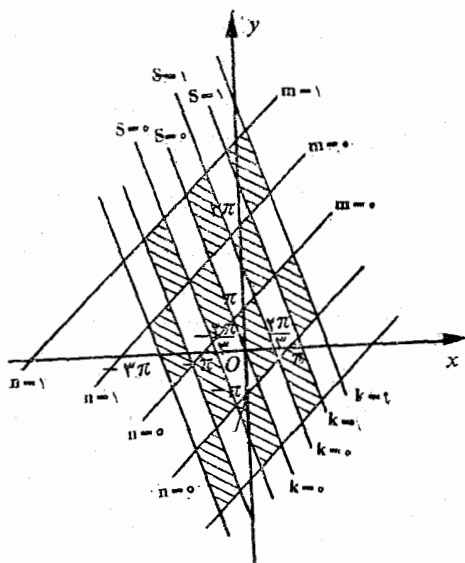
به اینصورت:

$$48\pi - 2\pi < 3x+y < 48\pi$$

که در آنها k و 8 عددهایی صحیح هستند.

$$\text{همه جوابهای نامعادله } \cos \frac{y-x}{2} > 0$$

$$-\pi + 4n\pi < y-x < \pi + 4n\pi$$



شکل ۷۳

و همه جوابهای نامعادله $\cos \frac{y-x}{2} < 0$

$$\pi + 4m\pi < y-x < 3\pi + 4m\pi$$

که m و n عددهایی صحیح هستند.

ابتدا این خطها را در نظر می گیریم:

$$(A) \begin{cases} 3x+y=4k\pi \\ 3x+y=4k\pi+2\pi \end{cases}; (B) \begin{cases} y-x=4n\pi-\pi \\ y-x=4n\pi+\pi \end{cases};$$

$$(C) \begin{cases} 3x+y=4s\pi-2\pi \\ 3x+y=4s\pi \end{cases}; (D) \begin{cases} y-x=4m\pi+\pi \\ y-x=4m\pi+3\pi \end{cases}$$

هر دو خط موازی (A) (به ازای هر مقدار صحیح k) و هر دو خط موازی B (به ازای هر مقدار صحیح n) با هم متوازی الاضلاع می سازند که برای مختصات هر نقطه داخلی آن نامساوی (۱) برقرار است.

به همین ترتیب برای معادله های (C) و (D) (شکل ۷۳).

$$\begin{cases} x - y + ۶ > ۰ \\ ۳x + y - ۶ < ۰ \\ x + ۳y + ۶ > ۰ \end{cases} \quad \text{۴۳. جواب:}$$

۴۴. جواب: به صورت تابع ضمنی:

$$۸x^2 + ۵y^2 + ۴xy + ۳۶x + ۱۸y + ۹ = ۰$$

و به صورت تابع صریح:

$$y = -\frac{1}{5} [۲x + ۹ \pm \sqrt{۱۴۵ - (x + ۱۲)^2}]$$

۴۵. این مکان يك هذلولی است؛ اگر نقطه‌ای از این مکان را $M(x, y)$

بگیریم، طبق شرط مسأله باید داشته باشیم:

$$MF - MF' = \pm ۲a$$

علامت $\pm$ مربوط به اینست که $MF > MF'$ یا $MF < MF'$ باشد، این رابطه چنین می‌شود:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm ۲a$$

که اگر این معادله را گویا کنیم، با فرض $c^2 - a^2 = b^2$ بدست می‌آید:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ۱$$

۴۶. این مکان يك سهمی است که رأس آن در مبدا مختصات و محور آن

منطبق بر محور طول است.

جواب: $y^2 = ۲px$.

۴۷. مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که حاصلضرب فاصله‌های هر يك از

آنها تا دو نقطه ثابت P و Q ، مقداری ثابت باشد، بیضی کاسینی نامیده می‌شود.

امتداد PQ را محور طول و

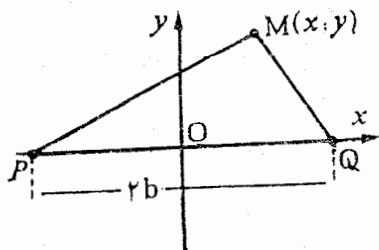
عمود منصف پاره خط PQ را محور

عرض می‌گیریم، در این صورت

$P(-b, ۰)$ و $Q(b, ۰)$ خواهد شد

(شکل ۷۴). اگر نقطه‌ای از مکان را

$M(x, y)$ بگیریم، طبق شرط مسأله



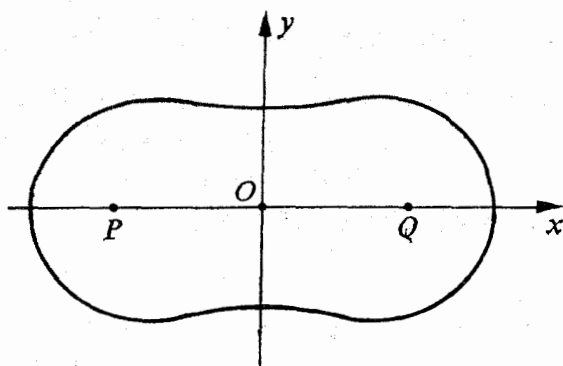
شکل ۷۴

باید داشته باشیم: $MP \cdot MQ = a^2$ ، که اگر آنرا بر حسب مختصات نقطه‌ها بیان کنیم، چنین می‌شود:

$$\sqrt{(x+b)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-b)^2 + y^2} = a^2$$

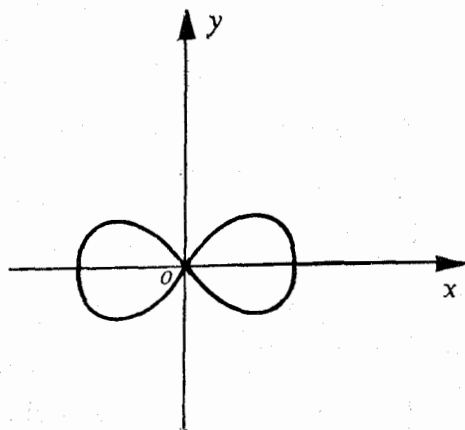
و اگر آنرا گویا و سپس ساده کنیم، معادله زیر (معادله بیضی کاسینی) بدست می‌آید:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) = a^4 - b^4$$



شکل ۷۵

که منحنی آن (شکل ۷۵) نسبت به محورها و مبدأ مختصات متقارن است.

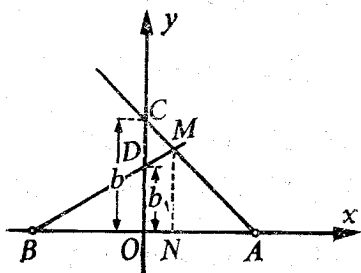


شکل ۷۶

در حالت خاصی که $a=b$ باشد معادله بیضی کاسینی به صورت:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

درمی آید و در این حالت آنرا لمپنسکات برنولی گویند (شکل ۷۶).



شکل ۷۷

۴۸. راهنمایی: پاره خطهای

b و b_1 را به کمک تشابه مثلثهای

$\triangle MNA$ و $\triangle GOA$ و سپس تشابه مثلثهای

$\triangle BNM$ و $\triangle BOD$ پیدا کنید. همچنین

می‌توانید b و b_1 را به عنوان عرضهای

نقطه‌هایی از پاره خطهای AM و

BM که طولی مساوی صفر دارند، بدست آورید (شکل ۷۷).

جواب: مکان دایره‌ای است به مرکز مبداء مختصات و شعاع مساوی a :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

۴۹. راهنمایی: قاعده مثلث را محور طول و وسط آنرا مبداء مختصات

بگیرید.

جواب: دایره $x^2 + y^2 = ۱۴$ و یا در حالت کلی دایره

$$s^2 = b^2 + c^2 \text{ که در آن } ۴(x^2 + y^2) = ۲s^2 - a^2$$

$$۵۰. \text{ جواب: سهمی } y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{25}{8}$$

۵۱. اگر نیروی جاذبه زمین نبود، گلوله در امتداد مماس بر انتهای ناودان

یعنی روی Oy با سرعت v متر در ثانیه حرکت می‌کرد و در ثانیه t ام در نقطه

$y = vt$ قرار داشت. از طرف دیگر اگر در انتهای ناودان سرعتی مساوی صفر داشت

در جهت کشش زمین (Ox) با شتاب g متر بر ثانیه حرکت می‌کرد و بعد از t ثانیه

در نقطه $x = \frac{1}{2}gt^2$ روی محور Ox قرار داشت. از حذف پارامتر t بین x و y ،

معادله مسیر بدست می‌آید.

$$۵۲. \text{ جواب: سهمی } y^2 = \frac{2v^2}{g}x$$

۵۲. اگر مسیر حرکت نقطه‌ها، به‌عنوان محورهای مختصات و جهت حرکت آنها در جهت مثبت محور مربوطه و شروع حرکت را از نقطه‌های $A(a, 0)$ و $B(0, b)$ انتخاب کنیم، معادله مسیر نقطه وسط پاره خط AB به صورت

$$x - y = \frac{1}{2}(a - b)$$

درمی‌آید.

۵۳. دستگاه محورهای مختصات را مطابق شکل ۱۸ انتخاب می‌کنیم: $A(0, -a)$ و معادله خط AB (با انتخاب ضریب زاویه m برای آن) به‌صورت $mx - y = a$ و $B(\frac{a}{m}, 0)$ درمی‌آید. اگر عرض نقطه M یا M_1 را y بگیریم (چون روی خط AB قرار دارند) طول آنها $\frac{1}{m}(y + a)$ می‌شود:

$$BM^2 = BM_1^2 = b^2 \Rightarrow y^2 + \frac{1}{m^2}y^2 = b^2 \Rightarrow$$

$$y^2 = \frac{m^2 b^2}{m^2 + 1}$$

و از آنجا $m^2 = \frac{y^2}{b^2 - y^2}$ ، که اگر در معادله خط AB قرار دهیم، معادله

مکان M و M_1 چنین می‌شود:

$$x^2 y^2 = (b^2 - y^2)(y + a)^2$$

منحنی این مکان را کنکوئید گویند.

توضیح: اگر در همین مسأله نقطه‌های M و M_1 را روی خط AB و به‌فاصله‌ای مساوی OB از نقطه B بگیریم، معادله مکان نقطه‌های M و M_1 به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$a(x^2 - y^2) = y(x^2 + y^2)$$

که منحنی آن استروفوئید نامیده می‌شود.

۵۴. امتداد OA را محور طول و نقطه O را مبدا مختصات می‌گیریم. اگر ضریب زاویه وتر OB را مساوی m بگیریم، معادله آن $y = mx$ و

معادله دایره مفروض $x^2 + y^2 - 2rx = 0$ و بنابراین مختصات نقطه B (محل برخورد OB با دایره) و در نتیجه، مختصات نقطه C بدست می‌آید:

$C(\frac{2r}{m^2+1}, 0)$. ضریب زاویه خط CM مساوی $-\frac{1}{m}$ و در نتیجه

معادله آن به صورت $y = -\frac{1}{m}(x - \frac{2r}{m^2+1})$ درمی‌آید. از برخورد

این خط با خط $y = mx$ ، مختصات نقطه M بر حسب پارامتر m بدست می‌آید:

$$M\left(\frac{2r}{(m^2+1)^2}, mx\right)$$

که از حذف m بین آنها، معادله مکان M بدست می‌آید:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2rx^3$$

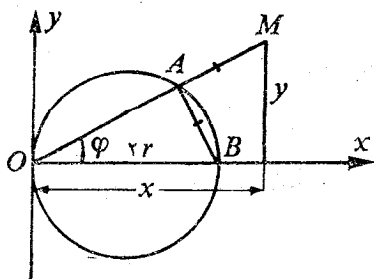
۵۵. داریم:

$$OM = OA + AM = OA + AB \quad (۱)$$

و با توجه به شکل ۷۸ بسادگی داریم:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad OA = 2r \cos \varphi = \frac{2rx}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$AB = \pm 2r \sin \varphi = \pm \frac{2ry}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



شکل ۷۸

در رابطه اخیر، علامت + برای

وقتی است که φ و در نتیجه y

مثبت است و علامت - برای

وقتی که φ و در نتیجه y منفی

است. اگر مقادیر OA، OM

و AB را در رابطه (۱) قرار

دهیم، معادله مکان بدست می‌آید.

جواب: برای $y > 0$ قوسی از دایره $y^2 + (x-r)^2 = r^2$

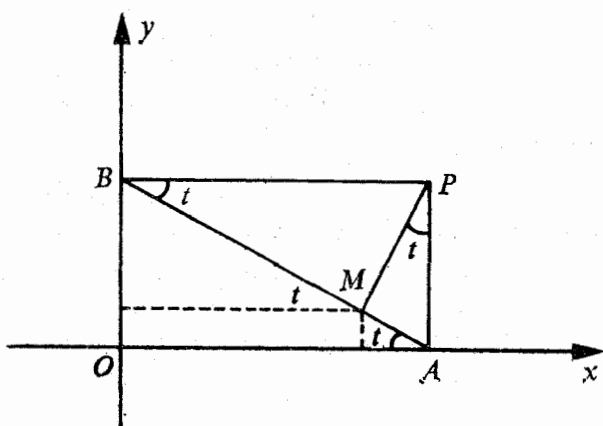
و برای $y < 0$ قوسی از دایره $y^2 + (x+r)^2 = r^2$

۵۶. جواب: منحنی این مکان سیسویید نام دارد و معادله آن چنین است:

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

۵۷. زاویه حاده بین قطر AB و محور طول را t و $M(x, y)$ می گیریم،

داریم (شکل ۷۹):



شکل ۷۹

$$x = MB \cos t = BP \cos^2 t = AB \cos^2 t;$$

$$x = a \cos^2 t$$

$$y = AM \sin t = AP \sin^2 t = AB \sin^2 t;$$

$$y = a \sin^2 t$$

با حذف t بین مختصات نقطه M ، معادله مکان آن بدست می آید:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{a}$$

منحنی این مکان آستروئید نامیده می شود.

۵۸. دستگاه محورهای مختصات را چنان انتخاب می‌کنیم که محور طول

بر OM و مبدأ مختصات بر O منطبق باشد. اگر $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ بگیریم، معادله

خط ON به صورت $y = kx$ درمی‌آید که در آن $k = \tan \alpha$.

فرض می‌کنیم $A(s, 0)$ و $B(t, kt)$ در این صورت بدست می‌آید:

$$P\left(\frac{s+mt}{1+m}, \frac{mkt}{1+m}\right) \text{ از طرف دیگر می‌دانیم } AB=1, \text{ یعنی:}$$

$$(s-t)^2 + k^2 t^2 = 1^2 \Rightarrow s = t \pm \sqrt{1^2 - k^2 t^2}$$

بنابراین معادله پارامتری مکان مطلوب چنین می‌شود:

$$\begin{cases} x = t \pm \frac{1}{m+1} \sqrt{1^2 - k^2 t^2} \\ y = \frac{mkt}{1+m} \end{cases}$$

از معادله دوم، $t = \frac{(1+m)y}{mk}$ بدست می‌آید، که اگر آنرا در معادله اول قرار

دهیم، خواهیم داشت:

$$x = \frac{1+m}{mk} y \pm \frac{1}{1+m} \sqrt{1^2 - \frac{k^2 y^2 (1+m)^2}{m^2 k^2}}$$

که با گویا کردن آن، پس از ساده کردن، خواهیم داشت:

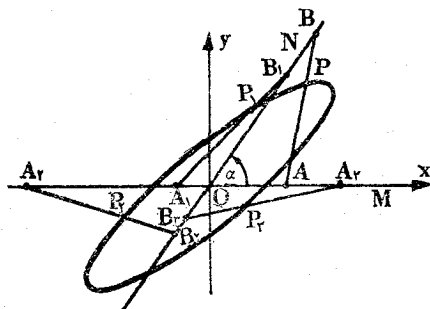
$$x^2 - 2 \frac{1+m}{mk} xy + \frac{(1+m)^2 + k^2}{m^2 k^2} y^2 - \frac{1^2}{(1+m)^2} = 0$$

و این همان معادله مکان مطلوب است. منحنی این مکان یک بیضی است که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق است (شکل ۸۵).

در حالتی که $\alpha = \frac{\pi}{4}$ باشد، با استدلالی شبیه آنچه گفتیم به معادله زیر

می‌رسیم:

$$x^2 + \frac{1}{m^2}y^2 - \frac{l^2}{(1+m)^2} = 0 \quad (2)$$



شکل ۸۰

معادله (۲) را می‌توان از معادله (۱) بدست آورد، به شرطی که در آن k بسمت بی‌نهایت میل کند. منحنی (۲) هم يك بیضی است که محورهای آن بر محورهای مختصات منطبق است و نیم قطرهای آن مساوی $\frac{l}{1+m}$ و $\frac{lm}{1+m}$ است.

در حالت $m=1$ ، یعنی وقتی که نقطه P پاره خط AB را نصف کند، مکان هندسی آن چنین می‌شود:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

یعنی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع مساوی $\frac{l}{2}$. این حالت را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

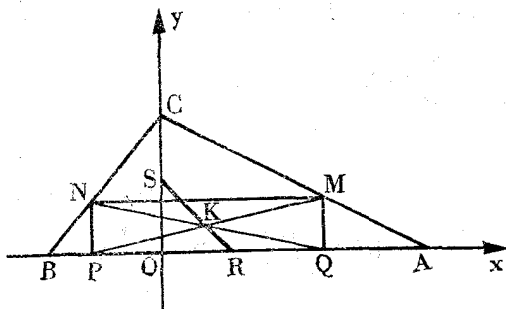
مکان هندسی وسط پاره خطهای مساوی که دو انتهای آنها بر دایره AB منطبق باشند، دایره‌ای است به مرکز رأس زاویه قائمه.

۵۹. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم (شکل ۸۱). محور طول را منطبق بر امتداد AB و محور عرض را منطبق بر امتداد ارتفاع CO می‌گیریم. فرض می‌کنیم: $OA=a$ ، $OB=b$ و $OC=h$. در این صورت

بدست می‌آید:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1 \quad \text{معادله AC}$$

$$-\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1 \quad \text{معادله BC}$$



شکل ۸۱

خط MN را موازی قاعده AB و به فاصله m از آن در نظر می‌گیریم،

مختصات نقطه‌های M و N از محل دودستگاه زیر معین می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1 \\ y = m \end{cases} ; \begin{cases} -\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1 \\ y = m \end{cases}$$

و از آنجا بدست می‌آید:

$$M\left[\frac{a}{h}(h-m), m\right]; N\left[-\frac{b}{h}(h-m), m\right]$$

و در نتیجه:

$$P\left[-\frac{b}{h}(h-m), 0\right]; Q\left[\frac{a}{h}(h-m), 0\right]$$

و دیگر بسادگی مختصات نقطه K (مرکز مستطیل) پیدا می‌شود:

$$K \left| \begin{array}{l} x = \frac{a-b}{2h}(h-m) \\ y = \frac{m}{2} \end{array} \right.$$

که با حذف m بین مختصات نقطه K خواهیم داشت:

$$2hx + 2(a-b)y = h(a-b),$$

$$\frac{x}{\frac{a-b}{2}} + \frac{y}{\frac{h}{2}} = 1$$

و این خطی است که از دو نقطه:

$$R\left(\frac{a-b}{2}, 0\right) \text{ و } S\left(0, \frac{h}{2}\right)$$

می‌گذرد. بنابراین مکان مطلوب عبارتست از پاره خط RS .

$$1060 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{بیضی}). \quad (2) \quad y = x + 1 \pm \sqrt{4x-3} \quad (\text{سهی}).$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{\lambda} [12x - 101 \pm \sqrt{13(104x + 13)}] \quad (\text{سهی}).$$

$$(4) \quad x^2 y^2 (x^2 + y^2 + 3) = 1 \quad (5) \quad y = \frac{2}{x^2 - 1} \quad \text{با شرط}$$

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

۰۶۱ فرض می‌کنیم $M(x, y)$ مجموعه نقطه‌های مورد نظر باشد. در

اینصورت باید داشته باشیم:

$$p(M, A) = p(M, B)$$

یعنی:

$$\text{Max}\{|x|, |y-2|\} = \text{Max}\{|x-1|, |y-4|\}$$

چهار حالت منطقی را که می‌توان انتخاب کرد، در نظر می‌گیریم:

(a) $|x-1| \geq |y-4|$ و $|x| \geq |y-2|$ در این حالت بدست می‌آید:

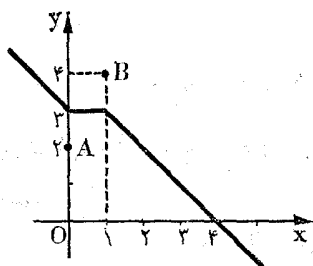
$$|x| = |x-1| \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ولی در این صورت باید $|y-2| \leq \frac{1}{2}$ و $|y-4| \leq \frac{1}{2}$ باشد که به سادگی غیر ممکن بودن آن معلوم می‌شود.

(b) $|x-1| < |y-4|$ و $|x| \geq |y-2|$ در این حالت بدست می‌آید:

$$|x| = |y-4| \Rightarrow \begin{cases} y = x+4 \\ y = -x+4 \end{cases}$$

برای $y = x+4$ ، با توجه به شرط این حالت، دستگاه دونا معادله زیر بدست می‌آید:



شکل ۸۲

$$\begin{cases} |x| \geq |x+2| \\ |x-1| < |x| \end{cases}$$

که ممکن نیست. برای $y = -x+4$ این دستگاه بدست می‌آید:

$$\begin{cases} |x| \geq |x-2| \\ |x-1| < |x| \end{cases}$$

که جواب $x \geq 1$ را قبول دارد. بنابراین نیم خطی از $y = -x+4$ که در آن $x \geq 1$ باشد جزو مکان مطلوب است.

اگر به همین ترتیب حالت‌های (c) و (d) را بررسی کنیم به شکل ۸۲ که مکان مورد نظر را نشان می‌دهد، می‌رسیم.

$$۶۲. \text{ جواب: } (۱) \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{4} \right), (۳, ۲), (۱, ۲), \omega$$

$$(۴) \left(-۲, \frac{1}{4} \right), \omega$$

۶۳. جواب: خط $y = ۱$.

۶۴. $\omega(\alpha, \beta)$ را مرکز تقارن منحنی می‌گیریم، در این صورت اگر

مبداء مختصات را به نقطه ω منتقل کنیم، باید به معادله‌ای برای منحنی برسیم که با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ تغییر نکند. رابطه‌های انتقال محورهای چنین است:

$$x = X + \alpha \quad \text{و} \quad y = Y + \beta$$

و بنابراین برای معادله جدید منحنی بترتیب داریم:

$$\begin{aligned} Y + \beta &= \sin^2(X + \alpha) = (\sin X \cos \alpha + \cos X \sin \alpha)^2 = \\ &= \sin^2 X \cos^2 \alpha + \cos^2 X \sin^2 \alpha + 2 \sin X \cos X \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin^2 X + 2 \sin X \cos X \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha = \\ &= \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 X + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 X + \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

و یا:

$$Y = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 X + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 X + (\sin^2 \alpha - \beta)$$

و برای اینکه این تابع با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ تغییر نکند، باید داشته باشیم:

$$\cos^2 \alpha = 0 \quad ; \quad \sin^2 \alpha - \beta = 0$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{1}{2}$$

بنابراین منحنی تابع مفروض دارای بی‌نهایت مرکز تقارن است که مختصات آنها چنین است:

$$\omega \left| \begin{array}{l} k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (k \text{ عددی است صحیح})$$

۶۵. جواب: $x = k\pi + \operatorname{Arctg} \frac{a}{b}$ (k عددی است صحیح).

۶۶. اگر مرکز تقارن را $\omega(\alpha, \beta)$ بگیریم، با انتقال مبدا به این نقطه

به معادله زیر می‌رسیم:

$$X^2 Y + (\gamma\alpha + c)XY + (\beta - 1)X^2 + (\gamma\alpha\beta + c\beta - \gamma\alpha - a)X + (\alpha^2 + c\alpha + d)Y + (\alpha^2\beta + c\alpha\beta + d\alpha - \alpha^2 - a\alpha - b) = 0$$

و برای اینکه این معادله با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ تغییر نکند، باید ضریبهای X^2, XY و مقدار ثابت معادله برابر صفر شود:

$$\begin{cases} \gamma\alpha + c = 0 \\ \beta - 1 = 0 \\ \alpha^2\beta + c\alpha\beta + d\beta - \alpha^2 - a\alpha - b = 0 \end{cases}$$

از معادله‌های اول و دوم این دستگاه بدست می‌آید: $\omega(-\frac{c}{\gamma}, -1)$ و این

مرکز تقارن منحنی است، بشرطی که مختصات آن در معادله سوم دستگاه صدق کند، که اگر قرار دهیم به رابطه زیر می‌رسیم:

$$c(a - c) = \gamma(b - d) \quad (1)$$

شرط (۱) شرط وجود مرکز تقارن در منحنی تابع مفروض است.

ضمناً از مختصات مرکز تقارن معلوم می‌شود که این نقطه اولاً روی مجانب افقی منحنی واقع است، ثانیاً از دو مجانب قائم منحنی بیك فاصله است.

۶۷. هر نقطه M به طول x از منحنی تابع مفروض در قرینه نسبت به خط $x = \gamma$ به نقطه‌ای مانند M' تبدیل می‌شود که عرض آن همان عرض نقطه M و طول آن مساوی $\gamma - x$ است (زیرا نقطه به طول γ باید وسط دو نقطه M و M' باشد). بنابراین برای پیدا کردن معادله منحنی قرینه، باید در معادله منحنی مفروض x را به $\gamma - x$ تبدیل کرد.

$$\text{جواب: } y = \frac{x - 5}{x - 3}$$

۶۸. در قرینه نسبت به نقطه $\omega(-1, -2)$ ، هر نقطه $M(x, y)$ از

منحنی به نقطه‌ای مانند $M'(-x-2, -y-4)$ تبدیل می‌شود (زیرا نقطه ω وسط پاره خط MM' است). بنابراین برای پیدا کردن معادلهٔ قرینهٔ منحنی تابع مفروض باید در آن x را به $-x-2$ و y را به $-y-4$ تبدیل کرد.

$$\text{جواب: } y = -(x^2 + 6x + 12).$$

۶۹. درقرینهٔ يك نقطه نسبت به نیمساز ربع اول و سوم x به y و y به x تبدیل می‌شود (و بهمین مناسبت اگر $f(x, y) = f(y, x)$ باشد، نیمساز ربع اول و سوم محور تقارن منحنی تابع $f(x, y) = 0$ است). بنابراین برای معادلهٔ منحنی قرینه، باید در تابع مفروض x را به y و y را به x تبدیل کرد.

$$\text{جواب: } y = x \pm \sqrt{x^2 - x}$$

۷۰. درقرینهٔ يك نقطه نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم، x به $-y$ و y به $-x$ تبدیل می‌شود (و بهمین مناسبت اگر $f(x, y) = f(-y, -x)$ باشد، نیمساز ربع دوم و چهارم محور تقارن منحنی تابع $f(x, y) = 0$ خواهد بود). در نتیجه برای بدست آوردن معادلهٔ منحنی قرینه، باید در تابع مفروض x را به $-y$ و y را به $-x$ تبدیل کرد.

$$\text{جواب: } y = 1 \pm \sqrt{2 - x}$$

۷۱. تابع مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$y = (x-3)^2 + |x-3| - 2 = f(x-3)$$

که در آن $f(x) = x^2 + |x| - 2$ تابع زوج است و بنابراین محور عرض، محور تقارن منحنی آنست، بنابراین برای تابع $y = f(x-3)$ خط $x=3$ محور تقارن منحنی آن می‌شود.

(۲) اگر همهٔ جمله‌ها را به سمت چپ تساوی منتقل کنیم، این معادله به صورت

$$F(x-1, y+2) = 0 \text{ در آن درمی‌آید که}$$

$$F(x, y) = \left| |y| - 3 \right| - \left| 2 - |x| \right|$$

نسبت به زوج است و بنابراین برای منحنی آن محورهای مختصات، محورهای

تقارن‌اند. به این ترتیب برای منحنی تابع $F(x-1, y+2)=0$ خطهای $x=1$ و $y=-2$ محورهای تقارن می‌شوند (و چون این دو محور برهم عمودند، محل تلاقی آنها، یعنی نقطه $\omega(1, -2)$ مرکز تقارن منحنی می‌شود).
(۳) تابع مفروض را می‌توان به این صورت نوشت:

$$(x^2 + 2x + 2)^2 = y^2 - 4y + 4$$

و یا: $F(x+1, y-2) = (y-2)^2 - [(x+1)^2 + 1]^2 = 0$
که در آن تابع $f(x, y) = y^2 - (x^2 + 1)^2$ تابعی است که نسبت به x و y زوج است.
بنابراین خطهای $x=-1$ و $y=2$ محورهای تقارن و نقطه $\omega(-1, 2)$ مرکز تقارن منحنی تابع مفروض است.

(۴) جواب: خط $y=-1$ محور تقارن منحنی است.

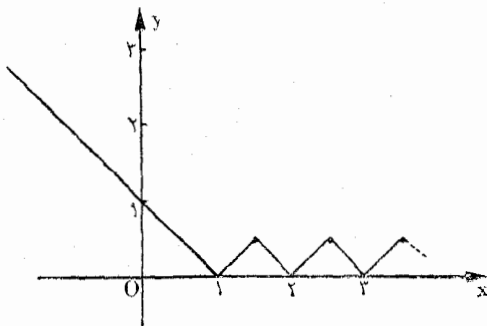
(۵) جواب: $x=-1$ تنها محور تقارن منحنی است.

(۶) جواب: خطهای $x=-2$ و $y=0$ محورهای تقارن و نقطه $\omega(-2, 0)$ مرکز تقارن منحنی تابع است.

(۷) جواب: خطهای $x=3$ و $y=-4$ محورهای تقارن و $\omega(3, -4)$ مرکز تقارن منحنی تابع است.

تابع - مشتق - حد - پیوستگی - کاربرد مشتق - رسم منحنی

۷۲. اگر $x \leq 1$ باشد، نزدیکترین عدد صحیح مثبت به آن، عدد ۱ و مقدار



شکل ۸۳

تابع مفروض به ازای این مقادیر x مساوی $1-x$ می شود.

برای مقادیر $x > 1$ و مثلاً وقتی $k < x < k+1$ باشد (k عددی است

صحیح و مثبت)، وقتی $x < k + \frac{1}{4}$ است، مقدار y مساوی فاصله k تا x یعنی

$x-k$ و وقتی که $x > k + \frac{1}{4}$ باشد، مقدار y مساوی فاصله x تا $k+1$

یعنی $1-x-k$ می شود. به این ترتیب تابع $y=f(x)$ را می توان چنین نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & (x \leq 1) \\ x-k & (k < x < k + \frac{1}{4}) \\ k+1-x & (k + \frac{1}{4} < x < k+1) \end{cases} \quad x > 1$$

در حالت $x = k + \frac{1}{4}$ ، به مفهوم دقیق، نزدیکترین عدد صحیح مثبت

برای آن وجود ندارد و بنابراین می توان گفت که تابع در این نقطه ها نامعین

است، به همین مناسبت روی شکل ۸۳ (که نمایش تغییرات تابع را نشان می دهد)،

این نقطه ها جزو نمایش تغییرات به حساب نیامده اند.

۷۳. روشن است که در این معادله $x > 0$ است و

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3x} - \sqrt{6}}{\sqrt{2x+6}} = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{\frac{6}{x}}}{\sqrt{2 + \frac{6}{x}}}$$

یک تابع صعودی است، زیرا برای مقادیر مثبت x ، وقتی که x بزرگ شود،

صورت کسر بزرگ و مخرج کوچک و در نتیجه $f_1(x)$ بزرگ می شود.

همچنین بسادگی معلوم می شود که :

$$f_2(x) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$$

برای مقادیر مثبت x يك تابع نزولی است. بنابراین معادله $f_1(x) = f_2(x)$ تنها يك جواب می تواند داشته باشد. از طرف دیگر توجه می کنیم که:

$$f_2(x) = f_1\left(\frac{12}{x}\right), \text{ زیرا:}$$

$$\begin{aligned} f_1\left(\frac{12}{x}\right) &= \frac{\sqrt{\frac{12}{x}} + \sqrt{\frac{36}{x}} - \sqrt{6}}{\sqrt{\frac{24}{x} + 6}} = \\ &= \frac{\sqrt{12} + \sqrt{36} - \sqrt{6x}}{\sqrt{24 + 6x}} = f_2(x) \end{aligned}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$x = \frac{12}{x} \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

و چون معادله نمی تواند بیش از يك جواب حقیقی داشته باشد، $x = 2\sqrt{3}$ تنها ریشه معادله است.

۷۴. اولاً ثابت می کنیم که کوچکترین دوره تناوب تابع مساوی $2a$ است.

از شرط مسأله معلوم است که به ازای همه مقادیر x داریم: $f(x+a) > \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x}$ را به سمت چپ تساوی می بریم و دو طرف را مجذور می کنیم:

$$\left[f(x+a) - \frac{1}{x}\right]^2 = f(x) - [f(x)]^2$$

و یا:

$$[f(x+a)]^2 - f(x+a) = f(x) - [f(x)]^2 - \frac{1}{x} \quad (1)$$

حالا می نویسیم:

$$f(x+2a) = \frac{1}{x} + \sqrt{f(x+a) - [f(x+a)]^2}$$

که با استفاده از رابطه (۱) بدست می آید:

$$\begin{aligned} f(x+2a) &= \frac{1}{2} + \sqrt{[f(x)]^2 - f(x) + \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} + \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = f(x) \end{aligned}$$

(از شرط $f(x) > \frac{1}{2}$ استفاده کردیم).

ثانیاً: بسادگی می توان تحقیق کرد که تابع زیر در شرطهای تابع به ازای $a=1$ صدق می کند (شکل ۸۴):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (2n \leq x < 2n+1) \\ 1 & (2n+1 \leq x < 2n+2) \end{cases} \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

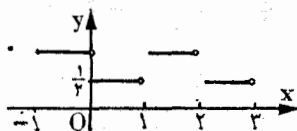
می توان نمونه بفرنجتری از این تابع را هم نشان داد (شکل ۸۵):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - n & (2n \leq x < 2n+1) \\ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}x - n - (\frac{1}{2}x - n)^2} & (2n+1 \leq x < 2n+2) \end{cases}$$

$$n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



شکل ۸۵



شکل ۸۴

۷۵. اولاً: تابع $f(x) = x^2 + x^2 + x$ به ازای $x > 0$ يك تابع صعودی است، بنابراین معادله مفروض نمی تواند بیش از يك ریشه مثبت داشته باشد. در

حالتی که $x < 0$ باشد، $f(x) = x(x^2 + x + 1)$ مقداری منفی می‌شود
 $(x^2 + x + 1)$ برای همه مقادیر حقیقی x ، مثبت است) و نمی‌تواند مساوی ۱
 شود؛ یعنی معادله مفروض ریشه منفی ندارد.

به این ترتیب با توجه به پیوسته بودن تابع $f(x)$ ، معادله مورد نظر، تنها یک
 ریشه مثبت می‌تواند داشته باشد.

ثانیاً: کافی است نامساوی مضاعف زیر را ثابت کنیم:

$$f\left(\frac{1}{4}\right) < 1 < f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

که تحقیق درستی آن بسادگی انجام می‌گیرد.

۷۶. قبلاً متذکر می‌شویم که وقتی از «تابع» صحبت می‌شود معمولاً منظور
 تابع یک ارزشی است؛ در حالت غیر آن بهتر است که از کلمه «نسبت» یا «رابطه»
 استفاده شود. بنابراین مثلاً در مورد این مسأله نمی‌توان گفت که یکی از تابعهای
 عکس به صورت $g(x) = \pm \sqrt{x}$ است.

در مورد تابع مفروض، دو تابع به سادگی بدست می‌آید:

$$g_1(x) = \sqrt{x} \quad \text{و} \quad g_2(x) = -\sqrt{x}$$

برای پیدا کردن تابع معکوس سوم، متذکر می‌شویم که برای برقرار بودن
 تساوی $x = (g(x))^2$ (برای $x > 0$)، کافی است برای هر مقدار $x > 0$ ،
 $g(x)$ مساوی $\sqrt{x}$ یا $-\sqrt{x}$ باشد. به این ترتیب می‌توان مجموعه عددهای
 غیرمنفی را به دوزیر مجموعه A و B تقسیم کرد و تابع معکوس $g(x)$ را چنین
 نوشت:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (x \in A) \\ -\sqrt{x} & (x \in B) \end{cases}$$

بنابراین تابع $f(x) = x^2$ دارای بی‌نهایت تابع عکس می‌شود.

۷۷. جواب:

$$g(x) = \begin{cases} a & (x=1, a>0) \\ 0 & (x=0) \\ b & (x=-1, b<0) \end{cases}$$

۷۸. برای $0 \leq x \leq 1$ داریم $x = \sqrt{\cos y}$ و برای $-1 \leq x \leq 0$ داریم $x = -\sqrt{\cos y}$. بنابراین معکوس تابع مفروض چنین است:

$$۱) \quad 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow g(x) = \sqrt{\cos x} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

$$۲) \quad -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow g(x) = -\sqrt{\cos x} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

۷۹. در حالت $x \leq 2$ داریم:

$$x^2 - 4x + 6 - y = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{y-2}$$

که باتوجه به شرط $x \leq 2$ باید داشته باشیم:

$$x = 2 - \sqrt{y-2}$$

در حالت $x \geq 2$ داریم:

$$y = -x + 4 < 2; \quad x = -y + 4$$

بنابراین بدست می‌آید:

$$g(x) = \begin{cases} -x + 4 & (x \leq 2) \\ 2 - \sqrt{x-2} & (x \geq 2) \end{cases}$$

برای معادله $f(x) = g(x)$ دو حالت داریم:

$$۱) \quad x \leq 2, \quad x^2 - 4x + 6 = -x + 4 \Rightarrow x = 1, 2$$

$$۲) \quad x \geq 2, \quad -x + 4 = 2 - \sqrt{x-2} \Rightarrow x = 2, 3$$

بنابراین معادله $f(x) = g(x)$ دارای سه جواب حقیقی است:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$

۸۰. تابع مفروض را به اینصورت می نویسیم:

$$y = x - 2 + \frac{x+7}{x^2+2x+3}$$

چون به ازای $x > 1000000$ داریم:

$$\frac{x+7}{x^2+2x+3} < \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} < 0,0000002$$

بنابراین به ازای $x = 1385671/215$ با تقریب $0,000001$ داریم:

$$y \neq x - 2 = 1385669/215$$

۸۱. تابع $f(x)$ را چنین می نویسیم:

$$f(x) = 2x - \frac{2x^2}{1-x^2}$$

به ازای $x = 0,0015694$ این نامساوی درست است:

$$\frac{2x^2}{1+x^2} < 2x^2 < 2 \times 0,002^2 =$$

$$= 0,0000000016 < 0,000000002$$

بنابراین مقدار تابع تا $0,000000002$ تقریب چنین می شود:

$$f(x) \neq 2x = 0,0031388$$

۸۲. در حالت $0 \leq x \leq 2$ آنچه که از دوزنقه جدا می شود، مثلثی است به

قاعده مساوی x و ارتفاع مساوی $\frac{x}{2}$ و بنابراین مساحت آن مساوی $\frac{x^2}{4}$ می شود.

در حالت $2 < x \leq 4$ قسمت جدا شده عبارتست از یک مثلث و یک متوازی الاضلاع.

مساحت مثلث مساوی ۱ و مساحت متوازی الاضلاع مساوی $(x-2)$ می شود و

بنابراین مساحت شکل ABNM مساوی $(x-1)$ خواهد شد (شکل ۵۵ -

صفحه ۹۵). بنابراین تابع y بارابطه های زیر معین می شود:

$$y = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & (0 \leq x \leq 2) \\ x-1 & (2 < x \leq 4) \end{cases}$$

۸۳. چون x و $\sin(\log x)$ جلوعلاصت لگاریتم قرار دارند، باید داشته باشیم: $x > 0$ و $\sin(\log x) > 0$. از نامساوی دوم نتیجه می‌شود:

$$2k\pi < \log x < (2k+1)\pi \Rightarrow 10^{2k\pi} < x < 10^{(2k+1)\pi}$$

که در آنها k می‌تواند هر عدد صحیح دلخواه باشد و همین نامساویها، فاصله تغییرات x را نشان می‌دهد.

۸۴. جواب: $-\sqrt{3} < x < -1 - \sqrt{3}$ و $1 < x < \sqrt{3} - 1$.

۸۵. برای هر مقدار $x \geq 0$ داریم: $|x| - x = 0$ و بنابراین در اینحال مقدار تابع هم مساوی صفر می‌شود و $x > 0$ جزو فاصله تغییرات x است. از طرف دیگر، از مقدار زیر رادیکال معلوم است که برای حقیقی بودن تابع باید داشته باشیم: $\sin \pi x = 0$ که از آنجا $x = n$ بدست می‌آید. بنابراین حوزه تغییرات x عبارتست از $x \geq 0$ و $x = n$ ($n = -1, -2, -3, \dots$).

۸۶. (a) جواب: $0 < u^2 < 1$ و یا $-1 < u < 0$ و $0 < u < 1$.

(b) $0 < \sin x < 1$ یعنی $2k\pi < x < (2k+1)\pi$

(c) $0 < \ln x < 1$ یعنی $1 < x < e$

(d) به ازای هر مقدار صحیح x داریم $\frac{E(x)}{x} = 1$ ، به ازای مقادیر مثبت

و غیر صحیح x داریم $0 < \frac{E(x)}{x} < 1$ و به ازای مقادیر منفی و غیر صحیح x

داریم $\frac{E(x)}{x} > 1$. بنابراین حوزه تغییرات x چنین است:

$$n < x < n+1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

۸۷. برای مقادیری از x که به ازای آنها $|g(x)| \leq 1$ باشد $f[g(x)] = 0$ باشد و برای مقادیر $f[g(x)] = 1$ می‌شود. طبق فرض مسأله، به ازای $|x| > 2$ داریم $g(x) = -1$ ، بنابراین وقتی که $|x| > 2$ باشد، $f[g(x)] = 0$ است. وقتی که $|x| \leq 2$ باشد، برای اینکه $|g(x)| \leq 1$ شود باید داشته باشیم:

$$|x^2 - 2| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \leq x \leq -1 \end{cases}$$

که در این حالت هم $f[g(x)] = 0$ است. وقتی که $\sqrt{3} < x \leq 2$ یا: $-2 \leq x < -\sqrt{3}$ باشد، $|g(x)| > 1$ می‌شود و داریم $f[g(x)] = 1$ بنابراین جواب چنین است:

$$f[g(x)] = \begin{cases} 0 & (|x| > 2, 1 \leq x \leq \sqrt{3}, -\sqrt{3} \leq x \leq -1) \\ 1 & (\sqrt{3} < x \leq 2, -2 \leq x < -\sqrt{3}) \end{cases}$$

۸۸. باید دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 32 > 0 \\ x^2 - 8x - 20 > 0 \\ x^2 - 4x - 32 \leq x^2 - 8x - 20 \end{cases}$$

که از آنجا جواب $-2 < x \leq 3$ بدست می‌آید.

۸۹. x همه مقادیر حقیقی را می‌تواند اختیار کند و داریم:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_a(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \log_a \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= -\log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x) \end{aligned}$$

و چون $f(-x) = -f(x)$ ، بنابراین $f(x)$ تابعی است فرد.

۹۰. $\varphi(x)$ و $\varphi(x)$ را دو تابع زوج فرض می‌کنیم و a را عددی از فاصله

تغییرات مجموع آنها، یعنی $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ می‌گیریم. در این صورت

a جزء فاصله تغییرات $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ هم خواهد بود و ضمناً از شرطهای
 $\psi(a) = \psi(-a)$ و $\varphi(a) = \varphi(-a)$ نتیجه می شود:

$$f(-a) = \varphi(-a) + \psi(-a) = \varphi(a) + \psi(a) = f(a)$$

یعنی $f(x)$ هم تابعی است زوج.

۰۹۱ داریم:

$$\begin{aligned} \text{a) } F_1(-x) &= \frac{f(-x) + f[-(-x)]}{2} = \\ &= \frac{f(-x) + f(x)}{2} = F_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } F_2(-x) &= \frac{f(-x) - f[-(-x)]}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = \\ &= -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -F_2(x) \end{aligned}$$

چون $F_1(x) + F_2(x) = f(x)$ ، بنابراین هر تابعی (اگر در فاصله
 مقادیری نسبت به صفر معین باشد، می توان به مجموع دو تابع تبدیل کرد که یکی
 از آنها زوج و دیگری فرد است.

۰۹۲ فرض می کنیم که عدد $T > 0$ وجود داشته باشد، بنحوی که به ازای
 همه مقادیر x داشته باشیم:

$$\sin x = \sin(x + T) \quad (1)$$

$x = 0$ می گیریم، بدست می آید $0 = \sin T$ و از آنجا خواهیم داشت:

$T = \sqrt{n\pi}$ ، بنابراین $(n = 0, 1, 2, \dots)$ $T = \sqrt{n\pi}$ این مقدار T را در
 رابطه (۱) قرار می دهیم:

$$\sin x = \sin(x + \sqrt{n\pi}) = \sin(x + \sqrt{2x\sqrt{n\pi}} + n\pi) \quad (2)$$

x را بنحوی آزمایش می کنیم که با هیچیک از مقادیر $\frac{2m\pi - n\pi}{2\sqrt{n\pi}}$ (عددی m)

است صحیح برابر نباشد (روشن است که چنین مقداری را می توان برای x انتخاب

کرد). در این صورت بدست می‌آید:

$$2x\sqrt{n\pi} + n\pi \neq 2m\pi$$

و بنابراین:

$$\sin x^2 \neq \sin(x^2 + 2x\sqrt{n\pi} + n\pi)$$

که تساوی (۲) را نقض می‌کند. در نتیجه تابع $f(x) = \sin x^2$ نمی‌تواند متناوب باشد.

۹۳. (a) طبق شرط مسأله: $x \in [2k, 2k+2]$ ، یعنی $2k \leq x < 2k+2$

از آنجا بدست می‌آید: $0 \leq x - 2k < 2$. چون در فاصله $[0, 2]$ داریم

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ پس در فاصله } [2k, 2k+2] \text{ داریم:}$$

$f(x - 2k) = (x - 2k)^2 - 1$. از آنجا که دوره تناوب تابع $f(x)$ مساوی ۲ است با ۲، بنابراین $f(x) = f(x - 2k)$. به این ترتیب ثابت کردیم که اگر $2k \leq x < 2k+2$ باشد، داریم:

$$f(x) = (x - 2k)^2 - 1$$

(b) چون $x = 7$ در فاصله $[2 \times 3, 2 \times 3 + 2]$ قرار دارد، بنابراین

$$f(7) = f(7 - 2 \times 3) = (7 - 2 \times 3)^2 - 1 = 0$$

و سپس

$$f\left(\frac{15}{4}\right) = f\left(\frac{15}{4} - 2\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 1 = \frac{33}{16},$$

$$f(-\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2} + 2) = (2 - \sqrt{2})^2 - 1 = 5 - 4\sqrt{2},$$

$$f(\pi) = f(\pi - 2) = (\pi - 2)^2 - 1 = \pi^2 - 4\pi + 3$$

۹۴. تابع $y = z \ln z$ به ازای $z > 1$ عبارتست از حاصلضرب دو تابع

صعودی مثبت و بنابراین صعودی است. تابع

$$z = x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2 > 1$$

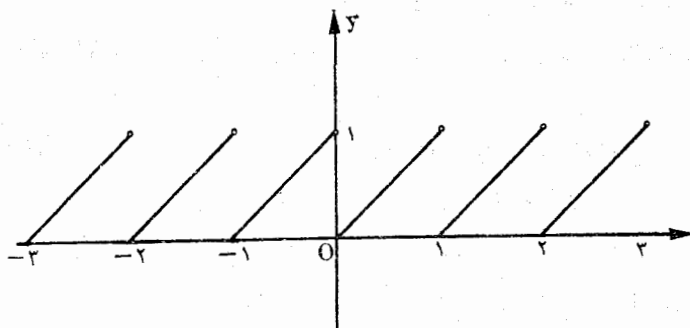
به ازای $x > -2$ صعودی و به ازای $x < -2$ نزولی است. در نتیجه تابع

مفروض هم به ازای $x > -2$ صعودی و به ازای $x < -2$ نزولی است.

۹۵. با توجه به تساوی $E(x+1)=E(x)+1$ داریم:

$$f(x+1)-(x+1)-E(x+1)=x-E(x)=f(x)$$

و بنابراین کوچکترین دوره تناوب تابع برابر است با ۱. نمایش تغییرات تابع در شکل ۸۶ داده شده است:



شکل ۸۶

۹۶. جواب: $1 + \frac{\pi}{4}$

$$y = \sin(\cos^2 X) \cdot \cos(\sin^2 X)$$

۹۷. داریم:

$$y' = -2 \sin X \cos X \cos(\cos^2 X) \cdot \cos(\sin^2 X) -$$

$$- 2 \sin X \cos X \sin(\sin^2 X) \sin(\cos^2 X) =$$

$$= -2 \sin X \cos X [\cos(\cos^2 X) \cdot \cos(\sin^2 X) +$$

$$+ \sin(\cos^2 X) \cdot \sin(\sin^2 X)] =$$

$$= -\sin^2 X [\cos(\cos^2 X) - \sin^2 X] = -\sin^2 X \cdot \cos(\cos^2 X)$$

۹۸. بترتیب داریم:

$$y' = [\sin(\sin X)]' \cdot \cos[\sin(\sin X)] =$$

$$= (\sin X)' \cdot \cos(\sin X) \cdot \cos[\sin(\sin X)] =$$

$$= \cos X \cdot \cos(\sin X) \cdot \cos[\sin(\sin X)]$$

۹۹. جواب: $y' = -3 \operatorname{tg}^2 X \cdot \sec^2 X \cdot \sin(2 \operatorname{tg} X) \cdot \cos[\cos^2(\operatorname{tg}^2 X)]$

$$\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$.(x \neq k\pi) \quad y' = -\frac{1}{x^2 \sin^2 x \sqrt{\cot x}} : \text{جواب: } ۱۰۰$$

$$.(a \neq 0) \quad y' = \frac{2ax}{x^2 + a^2} : \text{جواب: } ۱۰۱$$

$$.(x \neq 0) \quad y' = \frac{1}{x^2 + 2} : \text{جواب: } ۱۰۲$$

$$.(x > 0) \quad y' = \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} : \text{جواب: } ۱۰۳$$

$$.(|x-1| < \sqrt{2}) \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} : \text{جواب: } ۱۰۴$$

$$.(x > 0) \quad y' = \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} : \text{جواب: } ۱۰۵$$

$$.(0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2}) \quad y' = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} : \text{جواب: } ۱۰۶$$

$$.(x \neq k\pi) \quad y' = \frac{\sin 2x}{|\sin x|} : \text{جواب: } ۱۰۷$$

$$\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad y' = -1 : \text{جواب: } ۱۰۸$$

$$.(x \neq 0) \quad y' = \frac{-2x}{|x|(1+x^2)} : \text{جواب: } ۱۰۹$$

$$y' = \frac{1}{a + b \cos x} : \text{جواب: } ۱۱۰$$

$$.(|x| < 1) \quad y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2} \arccos(x^2)} : \text{جواب: } ۱۱۱$$

$$y' = \frac{1+x^4}{1+x^6} \quad \text{جواب: ۰۱۱۲}$$

$$\text{جواب: ۰۱۱۳}$$

$$\left(k=0, 1, 2, \dots, |x| \neq \frac{k\pi}{2} \right) \quad y' = 2x \left[\frac{\cos x^2}{|\cos x^2|} + \frac{\sin x^2}{|\sin x^2|} \right]$$

$$y = |x| = \sqrt{x^2} \quad \text{۰۱۱۴ داریم:}$$

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} \quad \text{وازا آنجا:}$$

$$y' = |x| + \frac{x^2}{|x|} = \frac{x^2 + x^2}{|x|} = \frac{2|x|^2}{|x|} = 2|x| \quad \text{۰۱۱۵}$$

$$y' = \frac{3}{4} \sin 2x |\sin x| \quad \text{جواب: ۰۱۱۶}$$

$$y' = (x-1)(x+1)^2(\Delta x - 1) \times \frac{x+1}{|x+1|} \quad \text{جواب: ۰۱۱۷}$$

$$y' = 2xf'(x^2) \quad \text{جواب: ۰۱۱۸}$$

$$y' = \sin 2x [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)] \quad \text{جواب: ۰۱۱۹}$$

$$y' = f'(x) \cdot f'[f(x)] \cdot f'\{f[f(x)]\} \quad \text{جواب: ۰۱۲۰}$$

$$y' = f\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} f'\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \quad \text{جواب: ۰۱۲۱}$$

$$\text{۰۱۲۲ داریم:}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-1000) + \\ &+ x(x-2)(x-3)\dots(x-1000) + \dots + \\ &+ x(x-1)(x-2)\dots(x-999) = \\ &= (x-1)(x-2)\dots(x-1000) + x \cdot \varphi(x) \end{aligned}$$

$$f'(0) = (-1)(-2)(-3)\dots(-1000) = 1000! \quad \text{و بنابراین:}$$

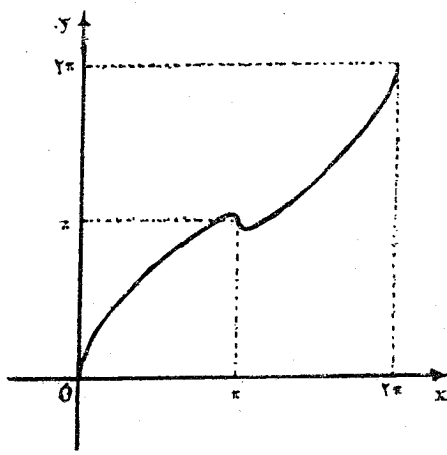
$$\text{۰۱۲۳ مشتق تابع چنین است:}$$

$$y' = 1 + \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x} + \cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

مشتق تابع به ازای $x = k\pi$ برابر بی‌نهایت می‌شود و بنابراین منحنی تابع در این نقطه‌ها دارای مماس قائم است.

برای رسم منحنی به نکته‌های زیر توجه کنید:

۱. منحنی تابع نسبت به مبداء مختصات و نسبت به نقطه (π, π) و ... و بطور کلی نسبت به نقطه $(k\pi, k\pi)$ متقارن است.
۲. مشتق تابع در نقطه‌های نزدیک به π برابر صفر است (اگر $y' = 0$ قرار دهیم $-0.9 < \cos x < -1$ بدست می‌آید).
۳. اگر منحنی نمایش تغییرات تابع را در فاصله $(0, 2\pi)$ رسم کنیم، بقیه منحنی از انتقال مبداء مختصات به نقطه $(2\pi, 2\pi)$ یا $(-2\pi, -2\pi)$ و سپس به نقطه $(4\pi, 4\pi)$ یا $(-4\pi, -4\pi)$ و غیره بدست می‌آید. منحنی نمایش تابع در فاصله $(0, 2\pi)$ چنین است:



شکل ۸۷

۱۲۴. از رابطه $y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ استفاده کنید.

$$\text{جواب: } (t \neq 1, t > 0) y'_x = \sqrt[6]{\frac{(1 - \sqrt{t})^4}{t(1 - \sqrt[3]{t})^3}}$$

$$0 < x < 1) y'_x = -1 \quad \text{جواب: } 0.125$$

$$(t \neq 2k\pi) \quad y'_x = \cotg \frac{t}{\gamma} \quad \text{جواب: } 0.126$$

$$-1 \quad \text{جواب: } 0.127$$

$$y' = \frac{1 - x - y}{x - y} \quad \text{جواب: } 0.128$$

$$y' = -\sqrt{\frac{y}{x}} \quad \text{جواب: } 0.129$$

$$1) \quad y'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad 2) \quad y'_{\sqrt{x}} = 1 \quad 0.130$$

$$3) \quad y = \sqrt{x} = (x^2)^{\frac{1}{4}} \quad \text{و}$$

$$y'_{x^2} = \frac{1}{4} (x^2)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$4) \quad y = \sqrt{x} = \sqrt{\text{Arcsin}(\sin x)} \quad (0 < x \leq \frac{\pi}{2}),$$

$$y'_{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot 2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos x} \quad (0 < x \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\arctg 2\sqrt{2} \neq 70^\circ 30' \quad \text{جواب: } 0.131$$

$$0.132 \quad \text{مشتق تابع چنین است: } y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \quad \text{ضریب زاویه مماس}$$

در نقطه $M(\alpha, \beta)$ برابر است با $-\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}$. و معادله خط مماس:

$$y = -\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}(x - \alpha) + \beta$$

می‌شود. اگر محل برخورد این خط را با محور

طول A و با محور عرض B فرض کنیم، طول A مساوی $\sqrt[3]{a^3\alpha}$ و عرض B مساوی $\sqrt[3]{a^3\beta}$ می‌شود (توجه داشته باشید که: $\sqrt[3]{\alpha^3} + \sqrt[3]{\beta^3} = \sqrt[3]{a^3}$).

در این صورت طول قطعه خط AB چنین است:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\sqrt[3]{a^3\alpha^3} + \sqrt[3]{a^3\beta^3}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3(\alpha^3 + \beta^3)}} = \\ &= \sqrt{\sqrt[3]{a^3 \cdot a^3}} = \sqrt{a^2} = a \end{aligned}$$

$$0.133 \text{ جواب: } \left(\frac{p}{3}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$$

0.134 داریم:

$$y' = -a \sin x + b \cos x ; y'' = -a \cos x - b \sin x ;$$

$$y'' + y = 0 \text{ و از آنجا:}$$

0.136 داریم:

$$\begin{aligned} y' &= n(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n-1} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \\ &= n(x + \sqrt{x^2 - 1})^n \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{ny}{\sqrt{x^2 - 1}} ; \\ y'' &= \frac{ny' \sqrt{x^2 - 1} - \frac{nxy}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \frac{ny}{\sqrt{x^2 - 1}} - \end{aligned}$$

$$-\frac{nxy}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

و از آنجا:

$$\begin{aligned}(x^2-1)y'' + xy' - n^2y &= (x^2-1)\left(\frac{ny'}{\sqrt{x^2-1}} - \right. \\ &\left. - \frac{nxy}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}\right) + xy' - n^2y = \\ &= ny'\sqrt{x^2-1} - \frac{nxy}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{nxy}{\sqrt{x^2+1}} - n^2y = \\ &= ny'\sqrt{x^2-1} - n^2y = n^2y - n^2y = 0.\end{aligned}$$

۱۳۷. داریم:

$$y = \frac{a-b}{x^2-(a+b)x+ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{a-b}x^2 - \frac{a+b}{a-b}x + \frac{ab}{a-b} :$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{y'}{y^2} = \frac{2}{a-b}x - \frac{a+b}{a-b} ; \quad \text{و از آنجا:}$$

$$\left(-\frac{y'}{y^2}\right)' = \frac{2y'' - yy''}{y^3} = \frac{2}{a-b}$$

۱۳۸. اگر طول نقطه P، پای قائم را، α بگیریم، عرض آن $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$

خواهد شد، در این صورت از یکطرف ضریب زاویه خط MP چنین می‌شود:

$$m_{MP} = \frac{y_P - y_M}{x_P - x_M} = \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha+1} + 2}{\alpha-2} = \frac{3\alpha+1}{(\alpha+1)(\alpha-2)}$$

از طرف دیگر ضریب زاویه قائم برابر $-\frac{1}{y}$ است و داریم:

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow m_{MP} = -\frac{(\alpha+1)^2}{2};$$

و در نتیجه به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{3\alpha+1}{(\alpha+1)(\alpha-2)} = -\frac{(\alpha+1)^2}{2};$$

این معادله بصورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha^2+2\alpha-1)=0 \Rightarrow \alpha=0, 1, -1 \pm \sqrt{2}$$

$$P_1 \Big|_{-1}^0; P_2 \Big|_0^1; P_3 \Big|_{-(\sqrt{2}-1)}^{\sqrt{2}-1}; P_4 \Big|_{\sqrt{2}+1}^{-(\sqrt{2}+1)}$$

و دیگر معادله‌های قائمه بدست می‌آید.

$$\frac{1}{y^2} = x^2 + ax + b \quad \text{۰۱۳۹ داریم:}$$

که اگر دوبار از دو طرف این رابطه نسبت به x مشتق بگیریم، به رابطه مطلوب می‌رسیم.

۰۱۴۰. اگر $f(x)$ از درجه n باشد، $f'(x)$ از درجه $n-1$ و

$f[f'(x)]$ از درجه $n(n-1)$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$n(n-1)=6 \Rightarrow n=2$$

بنابراین $f(x)$ باید به صورت:

$$f(x) = ax^2 + bx + c + d$$

باشد، از طرف دیگر از فرض مسأله روشن می‌شود که مشتق باید تنها شامل توانهای

زوج x باشد و بنابراین $b=0$ و $f(x) = ax^2 + cx + d$ می‌شود که در

این صورت $f'(x) = 2ax + c$ می‌شود و داریم:

$$f[f'(x)] = 27a^3x^3 + 27a^2cx^2 + 3ac(3ac+1)x^2 + (ac^3+c^2+d)$$

که اگر با عبارت فرض متحد قرار دهیم، مقادیر ضریبها بدست می‌آید:

$$a = \pm 1, c = \mp 1, d = 2 \text{ و}$$

$$f(x) = -x^2 + x + 2 \text{ یا } f(x) = x^2 - x + 2$$

۱۴۱. معادله مماس بر منحنی $y = x^n$ را در نقطه (a, a^n) می نویسیم:

$$y - a^n = y'(a)(x - a)$$

$$y - a^n = na^{n-1}(x - a) \quad \text{و یا:}$$

در معادله مماس $y = 0$ می گیریم:

$$-a^n = na^{n-1}(x - a)$$

$$x_n = a\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{و از آنجا:}$$

به ازای $x \leq -1$ داریم $1 - \frac{1}{n} \leq 2$ و به ازای $n > 1$ داریم $1 - \frac{1}{n} < 1$

$$|x_n| \leq 2|a| \quad \text{بنابراین:}$$

وقتی $n < 0$ باشد، دنباله $\{x_n\}$ صعودی و وقتی $n > 0$ باشد، بازهم

دنباله $\{x_n\}$ صعودی است ($a > 0$)، ولی $x_{-1} = 2a$ و $x_0 = 0$ ، یعنی

$$x_{-1} > x_0, \text{ بنابراین دنباله } \{x_n\} \text{ غیر یکنواست.}$$

حد دنباله x_n را پیدا می کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = a$$

۱۴۲. هم صورت و هم مخرج کسر نسبت به x از درجه $\frac{1}{4}n(n+1)$ است

و بنابراین حد این عبارت وقتی که $x \rightarrow \infty$ برابر است با

$$\frac{1}{\frac{1}{4}n(n+1)}$$

n

۱۴۳. بترتیب داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) + (x^2-1) + \dots + (x^n-1)}{(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (x+1) + (x^2+x+1) + \dots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)] = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

روشن است که با قاعده هویپتال هم می‌توان به همین نتیجه رسید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + 2x + \dots + nx^{n-1}) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

۱۴۴. جواب: $\frac{۴۹}{۲۴}$

۱۴۵. اگر از قاعده هویپتال استفاده کنیم، باید دوبار از صورت و مخرج

نسبت به x مشتق بگیریم. ولی بدون استفاده از قاعده هویپتال هم می‌توان عمل کرد. برای این منظور باید صورت را بر مخرج تقسیم کرد و خارج قسمت را بدست آورد (برای بدست آوردن خارج قسمت ابتدا فاکتور $x - 1$ را از صورت خارج می‌کنیم و سپس یکبار دیگر فاکتور $x - 1$ را بیرون می‌آوریم). این خارج قسمت چنین است:

$$x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + \dots + (n-1)x + n$$

که حد آن وقتی $x \rightarrow 1$ می‌شود:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

۱۴۶. عبارت مفروض با تبدیلهای ساده به صورت $\frac{(2x+a)n - (2x+a)}{2n}$ در

می‌آید؛ جواب: $x + \frac{a}{2}$

$$x^2 + ax + \frac{1}{3}a^2 \quad \text{جواب: } ۱۴۷$$

۱۴۸. جواب: ۱. ۱۴۹. جواب: $\frac{1}{2}$. ۱۵۰. جواب: ۳.

۱۵۱. جواب: ۱. ۱۵۲. جواب: $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. ۱۵۳. جواب: $\frac{2}{27}$

$$\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} \cdot ۱۵۵ \quad \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n} \quad \text{جواب: } ۱۵۶$$

۱۵۶. بترتیب داریم:

$$\frac{\sqrt[m]{1+p(x)} - 1}{x} = \frac{a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1}}{\sqrt[m]{\alpha^{m-1}} + \sqrt[m]{\alpha^{m-2}} + \dots + \sqrt[m]{\alpha} + 1}$$

که در آن $\alpha = 1 + p(x)$ است که به ازای $x=0$ ، صورت کسر مساوی a_1 و مخرج مساوی m می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+p(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}$$

$$۱۵۷. \text{ جواب: } \frac{1}{4} \quad ۱۵۸. \text{ جواب: } \frac{1}{4} \quad ۱۵۹. \text{ جواب: } ۱$$

$$۱۶۰. \text{ جواب: } ۲ \quad ۱۶۱. \text{ جواب: } -\frac{1}{4}$$

$$۱۶۲. \text{ جواب: } \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \quad ۱۶۳. \text{ جواب: } ۲^n$$

$$۱۶۴. \text{ جواب: } ۲n \quad ۱۶۵. \text{ جواب: } a = ۱, b = -۱$$

$$۱۶۶. \text{ جواب: } a_1 = ۱, b_1 = -\frac{1}{4}, a_2 = -۱, b_2 = \frac{1}{4}$$

$$۱۶۷. x - \pi = z \text{ فرض می‌کنیم، در این صورت } x = \pi + z \text{ خواهد شد}$$

و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(m\pi + mz)}{\sin(n\pi + nz)} =$$

$$= (-1)^{m+n} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin mz}{\sin nz} = (-1)^{m+n} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{mz}{nz} =$$

$$= (-1)^{m+n} \cdot \frac{m}{n}$$

۱۶۸. بترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (1 - \cos^2 x)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\cos x \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x) = 1 \end{aligned}$$

۰۱۶۹. بترتیب داریم:

$$1 + \sin x - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right);$$

$$1 + \sin px - \cos px = 2 \sin \frac{px}{2} \left(\sin \frac{px}{2} + \cos \frac{px}{2} \right);$$

و از آنجا اگر مقدار کسرها y فرض کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{p \left(\sin \frac{px}{2} + \cos \frac{px}{2} \right)} = \frac{1}{p}$$

۰۱۷۰. داریم:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) &= \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \times \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} \\ &\quad \frac{1}{2} \quad \text{جواب:} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\pi} \quad \text{جواب: } 1 - x = z \quad ۰۱۷۱.$$

$$۰۱۷۲. \text{ صورت کسریه } 4 \sin^2 \frac{x}{2} \sin(a+x) - \sin a \quad \text{قابل تجزیه است.}$$

جواب: $-\sin a$

۰۱۷۳. کسرها می‌توان پس از تبدیلات چنین نوشت:

$$\frac{4 \sin^2 x \cos(a+x)}{x^2 \sin a \sin(a+x) \sin(a+2x)}$$

$$\text{جواب: } \frac{4 \cos a}{\sin^3 a} \cdot (a \neq k\pi)$$

۱۷۴. صورت کسرمفروض را می‌توان بسادگی به شکل :

$$-\sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{3x}{2} \sin \left(2a + \frac{3x}{2} \right)$$

تبدیل نمود.

جواب: $\frac{3}{2} \sin 2a$

۱۷۵. اگر کسرمفروض را y فرض کنیم، داریم:

$$y = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2 (\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x})} =$$

$$\frac{2 \sin x \sin \frac{x}{2}}{x^2 \cos x (\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

که بسادگی با توجه به رابطه $\sin x = x$ و $\sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ بدست می‌آید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = \frac{1}{4}$$

۱۷۶. جواب: $\frac{4}{3}$

$$\frac{\sqrt{1 - \cos x}}{1 - \cos x} = \frac{\sqrt{2 \sin \frac{x}{2}}}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

۱۷۷. داریم:

جواب: $\sqrt{2}$

۱۷۸. جواب: صفر. ۱۷۹. جواب: ۳

۱۸۰. داریم:

$$\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$$

که با توجه به رابطه $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$ حد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0$$

$$\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{n^2} + \dots \quad \text{۰۱۸۱ داریم:}$$

با توجه به اینکه وقتی n بسمت بی نهایت میل می کند، می توان از جمله های بعد صرف نظر کرد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{2n^2} \right)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{2n^2} \right) = \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{2n^2} + \frac{3}{2n^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} = \frac{n(n+1)}{4n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{2n^2} \right) = \frac{1}{4} \quad \text{و بنابراین}$$

جواب: $\frac{1}{4}$

$$-2 \cdot 0.185 \quad \cdot \frac{\sin x}{x} \quad \cdot 0.184 \quad \cdot \frac{1}{1-x} \quad \cdot 0.183$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0.188 \quad 1 \cdot 0.182 \quad \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.186$$

$$0.190 \text{ صفر.} \quad \cdot \frac{a-b}{3ab} \quad \cdot 0.189$$

۰۱۹۱ داریم $a_1 < a_2$ و $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} (a_n^2 - a_{n-2}^2)$ از

آنجا با استقراء ریاضی ثابت می شود که برای هر مقدار n داریم: $a_n < a_{n+1}$.

علاوه بر آن می‌دانیم $a_1 < 1$ و اگر $a_k < 1$ باشد:

$$a_{k+1} = \frac{1}{4}(b + a_k^2) < \frac{1}{4}(1 + 1) = 1$$

یعنی دنباله $\{a_n\}$ صعودی و محدود است و بنابراین حدی دارد.

فرض می‌کنیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ ، در این صورت:

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{1}{4} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (b + a_n^2) \right] = \frac{1}{4}(b + c^2)$$

$$c = \frac{1}{4}(b + c^2) \quad \text{یعنی:}$$

$$c = 1 \pm \sqrt{1 - b} \quad \text{وازا آنجا:}$$

ولی چون $a_n < 1$ ، بنابراین $c \leq 1$ ، یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 - \sqrt{1 - b}$$

۱۹۲. بترتیب داریم:

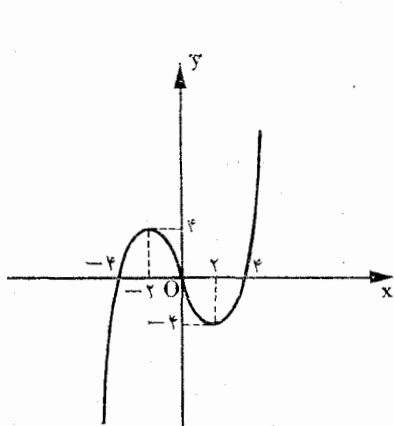
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^{2m} - 1}{x^{2n} - 1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{(x-1)(x^{2m-1} + \dots + x + 1)}{(x-1)(x^{2n-1} + \dots + x + 1)}} \\ &= \sqrt{\frac{2m}{2n}} = \frac{m}{n} \end{aligned}$$

۱۹۳. به‌ازای $x \leq 3$ داریم: $y = 3$ و به‌ازای $x > 3$ داریم: $y = 2x - 3$

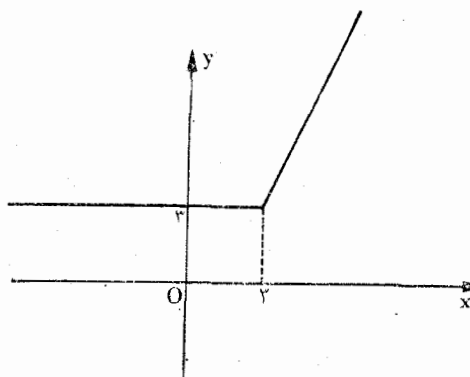
(شکل ۸۸). تابع درفاصله $[-\infty, 3]$ ثابت و درفاصله $(3, +\infty)$ صعودی است.

۱۹۴. داریم: (شکل ۸۹).

$$y = \begin{cases} -x^2 - 4x & (x \leq 0) \\ x^2 - 4x & (x \geq 0) \end{cases}$$



شکل ۸۹



شکل ۸۸

تابع درفاصله‌های $(-\infty, -2)$ و $(3, +\infty)$ صعودی و درفاصله $(-2, 2)$ نزولی است. نقطهٔ ماکزیمم $(-2, 4)$ و نقطهٔ می‌نیمم $(2, -4)$ منحنی است. منحنی درمبداء مختصات برخط $4x + y = 0$ مماس است.

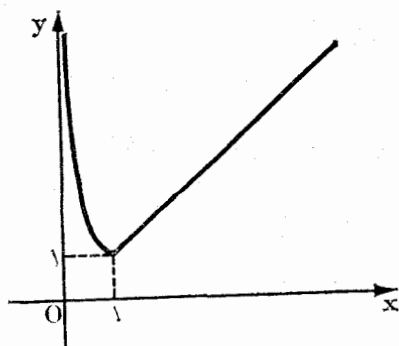
۱۹۵. پاره‌خطی از نیمساز ربع اول درفاصله $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. دو انتهای

این پاره‌خط جزونمایش تغییرات نیست.

۱۹۶. از آنجا که $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$ ، بنابراین $|\log_{\frac{1}{2}} x| = |\log_2 x|$

و تابع را می‌توان به صورت $y = 2^{|\log_2 x|}$ نوشت. تابع برای $x > 0$ معین است. اگر از دو طرف درمبنای ۲ لگاریتم بگیریم:

$$\log_2 y = |\log_2 x| = \begin{cases} -\log_2 x = \log_2 \frac{1}{x} & (0 < x < 1) \\ \log_2 x & (x > 1) \end{cases}$$

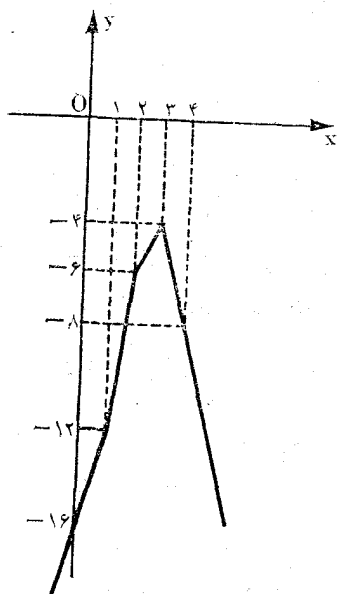


شکل ۹۰

و بنابراین (شکل ۹۰):

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x} & (0 < x < 1) \\ x & (x > 1) \end{cases}$$

۱۹۷. برای تعیین مقدار تابع در فاصله‌های مختلف داریم:



شکل ۹۱

$$۱) \quad x \leq 1; y = -x + 1 + 2x -$$

$$-4 + 3x - 9 - 4 = 4x - 16$$

$$۲) \quad 1 \leq x \leq 2; y = x - 1 + 2x -$$

$$-4 + 3x - 9 - 4 = 6x - 18$$

$$۳) \quad 2 \leq x \leq 3; y = x - 1 - 2x +$$

$$+4 + 3x - 9 - 4 = 2x - 10$$

$$۴) \quad x \geq 3; y = x - 1 - 2x +$$

$$+4 - 3x + 9 - 4 = -4x + 8$$

نمایش تغییرات تابع در شکل ۹۱

داده شده است. تابع در فاصله $(-\infty, 3)$

صعودی و در فاصله $(3, +\infty)$ نزولی

است. نقطهٔ ماکزیمم و

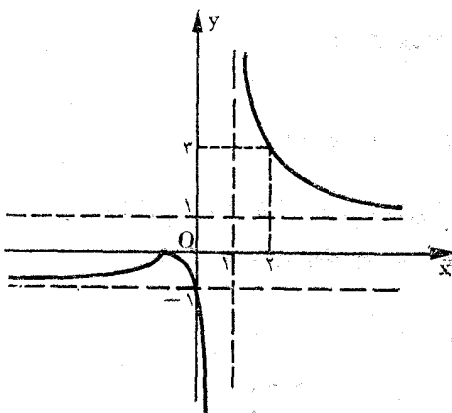
$(3, -4)$ و نقطه‌های $(2, -6)$ و $(1, -12)$

شکستگی منحنی تابع اند.

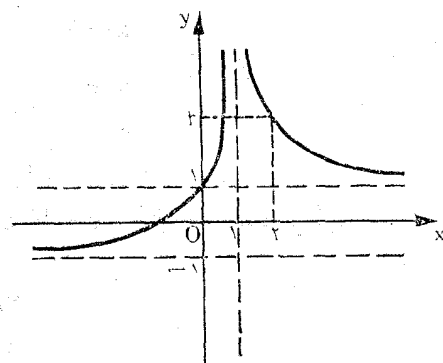
۱۹۸. پاره‌خطی از نیمساز ربع اول و سوم در فاصله $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

۱۹۹. داریم (شکل ۹۲):

$$y = \begin{cases} -\frac{x+1}{x-1} & (x < 1) \\ \frac{x+1}{x-1} & (x > 1) \end{cases}$$



شکل ۹۳



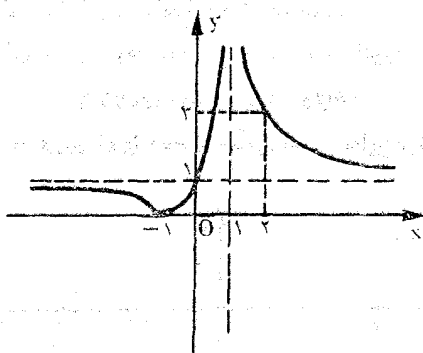
شکل ۹۲

۰۲۰۰ داریم (شکل ۹۳):

$$y = \begin{cases} -\frac{x+1}{x-1} & (x \leq -1) \\ \frac{x+1}{x-1} & (x > -1) \end{cases}$$

نقطه $(-1, 0)$ ، نقطهٔ ماکزیمم منحنی تابع است.

۰۲۰۱ داریم (شکل ۹۴):

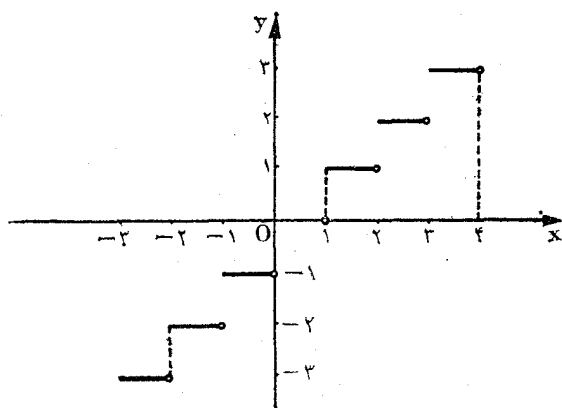


شکل ۹۴

$$y = \begin{cases} -\frac{x-1}{x-1} & (-1 < x < 1) \\ \frac{x+1}{x-1} & (x < -1 \text{ یا } x > 1) \end{cases}$$

نقطه $(-1, 0)$ می نیم منحنی تابع است.

۲۰۲. با توجه به تعریف تابع $y = E(x)$ ، شکل ۹۵ بدست می آید:



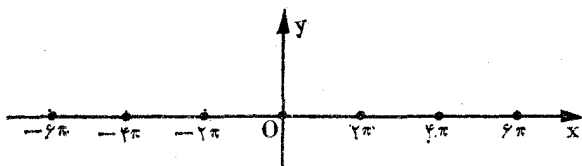
شکل ۹۵

۲۰۳. شکل مسأله ۹۵ صفحه ۲۴۰ دیده شود.

۲۰۴. برای حقیقی بودن مقدار y باید داشته باشیم:

$$\log \cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq 1$$

و بنابراین تنها $\cos x = 1$ یا $x = 2k\pi$ ممکن است. به این ترتیب تنها مختصات



شکل ۹۶

نقطه‌های $(2k\pi, 0)$ در تابع مفروض صدق می‌کند. تابع در تمام نقطه‌های خود ناپیوسته است و از نقطه‌هائی واقع بر محور طول و به فاصله 2π از یکدیگر تشکیل شده است (مبداء مختصات هم جزو این نقطه‌هاست) (شکل ۹۶).

۲۰۵. منحنی تابع $y = x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ را رسم می‌کنیم؛ منحنی تابع

$y = -x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ قرینه آن نسبت به محور طول خواهد بود. مشتق این

تابع به صورت $y' = \frac{-x^2 + x + 1}{(1-x)^2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$ در می‌آید که ریشه‌های صورت آن

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ است. از این دو جواب تنها $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ در حدود تغییرات x یعنی $-1 < x < 1$ است که به ازای آن:

$$y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}} \neq -0,3$$

بدست می‌آید.

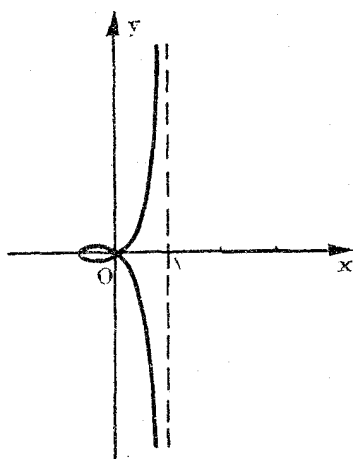
تابع به ازای $x = 0$ و $x = -1$

برابر صفر است و وقتی که x به سمت 1 میل کند، مقدار تابع به سمت $+\infty$ می‌رود.

تابع در فاصله $[-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2})$

نزولی و در فاصله $(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 1)$

صعودی و در نقطه به مختصات



شکل ۹۷

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \sqrt{\sqrt{5}-2} \right)$ می نیمم است.

در شکل ۹۷ تمام منحنی تابع $y = \pm x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ داده شده است،

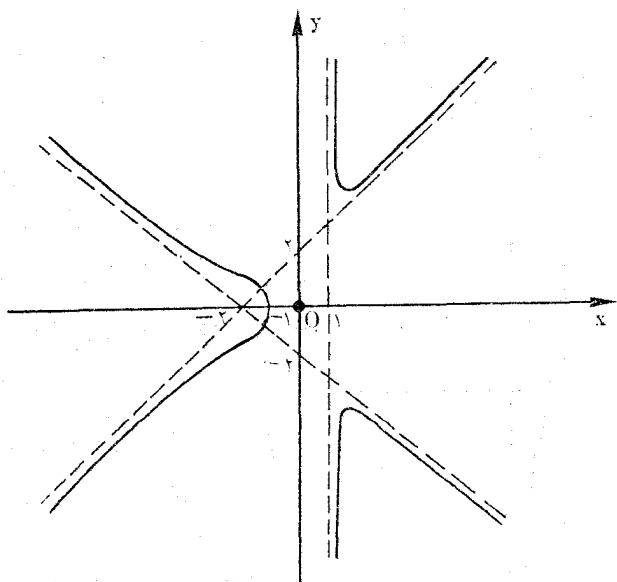
۲۰۶. تابع در فاصله‌های $x \leq -1$ و $x > 1$ و نقطه $x = 0$ معین و

نسبت به محور طول متقارن است. منحنی تابع $y = x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ را رسم می کنیم

و سپس قرینه آنرا نسبت به محور طول به آن اضافه می کنیم. مشق تابع به صورت

$$y' = \frac{x^2 - x - 1}{(x-1)^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

است، که به ازای مقادیر $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ، مساوی صفر



شکل ۹۸

می‌شود که از این دو مقدار تنها $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، در فاصله تغییرات x است و

به ازای آن $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \sqrt{2+\sqrt{5}} \neq 3/3$ می‌شود. تابع دارای مجانب

$y = x + 2$ و نیم مجانب $x = 1$ ($x \rightarrow +\infty$) و در نقطه $(-1, 0)$ مماس قائم دارد.

در شکل ۹۸ منحنی نمایش تابع $y = \pm x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ رسم شده است.

این منحنی دارای يك نقطه منفرد (مبداء مختصات) می‌باشد.

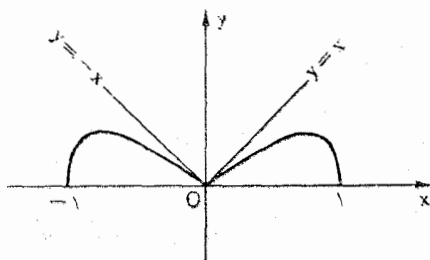
۲۰۷. تابع در فاصله $-1 < x < 1$ معین است و مشتق آن به صورت

$$y' = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{در می‌آید. مشتق به ازای } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ مساوی}$$

صفر و به ازای $x = 0$ نامعین است.

در حقیقت:

$$\lim_{x \rightarrow -0} y' = -1 \quad \lim_{x \rightarrow +0} y' = 1$$



شکل ۹۹

یعنی وقتی که منحنی در ربع اول به مبداء نزدیک می‌شود، در مبداء بر نیمساز ربع اول مماس است و وقتی که در ربع دوم به مبداء نزدیک می‌شود، در مبداء بر نیمساز ربع دوم مماس است.

منحنی در مبداء مختصات می‌نیم و در نقطه‌های $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ و $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$

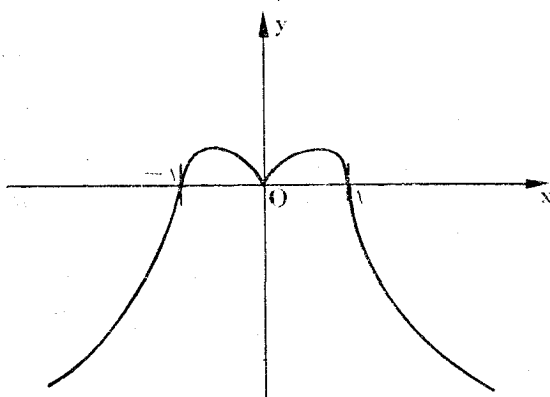
ماکزیمم است. مماس بر منحنی در نقطه‌های $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ قائم است

(شکل ۹۹).

$$۲۰۸. \text{ مشتق تابع } y' = \frac{2(1-2x^2)}{3\sqrt[3]{x(1-x^2)^2}} \text{ است و در نقطه‌های } x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

و $x=0$ تغییر علامت می‌دهد. منحنی تابع در نقطه‌های به طول $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

مماس افقی و در نقطه‌های $x=0$ و $x = \pm 1$ مماس قائم دارد. و نسبت به محور عرض متقارن است (شکل ۱۰۰):



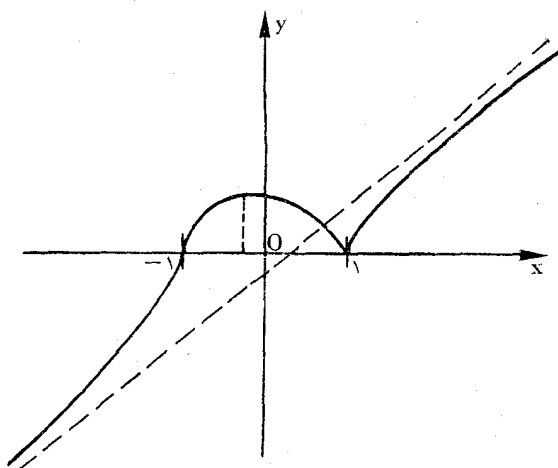
شکل ۱۰۰

$$۲۰۹. \text{ مشتق تابع به صورت } y' = \frac{3x+1}{3\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} \text{ درمی‌آید و}$$

بنابراین منحنی تابع در نقطه $x = -\frac{1}{3}$ مماس افقی و در نقطه‌های $x = 1$ و $x = -1$

مماسهای قائم دارد. منحنی دارای مجانبی است به معادله $y = x - \frac{1}{3}$ و در

نقطه $(0, 1)$ محور عرض را قطع می‌کند (شکل ۱۰۱).



شکل ۱۰۱

۲۱۰. مشتق تابع به صورت زیر درمی آید:

$$y' = (-x^2 + 12) \left[\frac{1}{(x^2 - 8x + 12)^2} + \frac{1}{(x^2 + 7x + 12)^2} \right]$$

و بنابر این به ازای $x = \pm 2\sqrt{3}$ تغییر علامت می دهد.

خطهای $x = 6$ و $x = 2$ ، $x = -3$ ، $x = -4$ میجانبهای منحنی تابع هستند و منحنی در نقطه های به طولهای $\pm 5/2$ و $\pm 2/3$ (به تقریب) محور طول، و در نقطه به عرض ۲ محور عرض را قطع می کند.

۲۱۱. مشتق تابع چنین است:

$$y' = \frac{(x+2)(3x+4)^3(9x+8)(3x-4)}{x^2(9x^2+25x+16)^2}$$

و بنابر این دارای دوماکزیم و دومینییم است. منحنی چهارمجانب به معادله های

$$y = 9x + 25 \text{ و } x = -\frac{16}{9}, x = -1, x = 0 \text{ دارد.}$$

۲۱۲. منحنی نمایش تغییرات این تابع يك هذلولی است كه خطهای

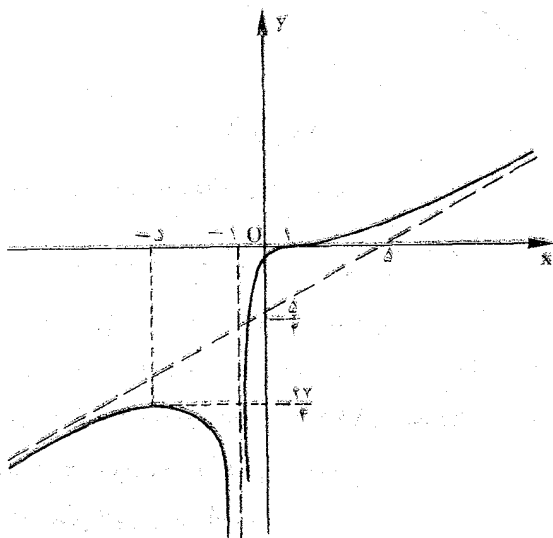
$y = x$ و $y = 2x$ مجانبهای آنست و ضمناً نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

۲۱۳. مشتق تابع $y' = \frac{(x-1)^2(x+5)}{2(x+1)^3}$ تابع در نقطه به مختصات

$(-\frac{27}{4}, -5)$ ماکزیمم و در نقطه $(1, 0)$ بر محور طول مماس است. خطهای

مجانب $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ و $(y \rightarrow -\infty)x = -1$ مجانبهای منحنی هستند. منحنی

مجانب مایل خود را در نقطه $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ قطع می کند (شکل ۱۰۲).

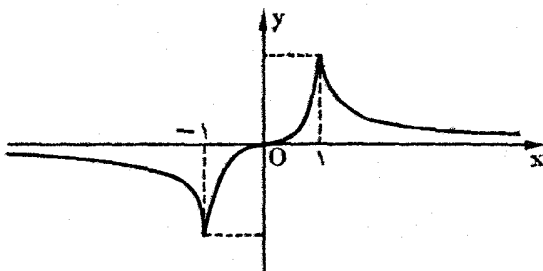


شکل ۱۰۲

۲۱۴. صورت کسر مشتق همیشه منفی $y' = \frac{2(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})}{3\sqrt{x^2-1}}$

است، ولی مخرج آن به ازای $x = -1$ و $x = 1$ تغییر علامت می دهد. خط $y =$ مجانب منحنی است و منحنی در نقطه های $(-1, -\sqrt{4})$ و $(1, \sqrt{4})$ مماس قائم

دارد. مبدا مختصات مرکز تقارن منحنی است و در این نقطه، ضریب زاویه مماس بر منحنی مساوی $\frac{4}{3}$ است. (شکل ۱۰۳).

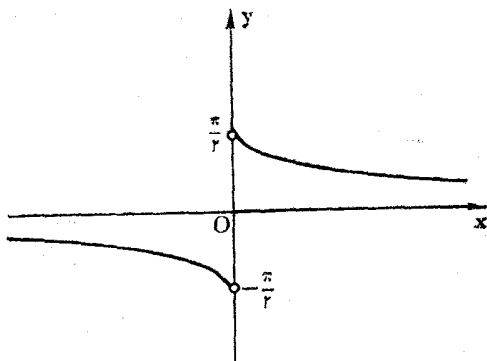


شکل ۱۰۳

۲۱۵. $y' = -\frac{1}{x^2 + 1} < 0$ و بنابراین تابع همیشه نزولی است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) = 0$$

یعنی محور طول، مجانب منحنی است. تابع در نقطه $x = 0$ منفصل است، حد راست



شکل ۱۰۴

وحد چپ تابع درین نقطه چنین است:

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \frac{\pi}{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow -0} y = -\frac{\pi}{2}$$

منحنی تابع در شکل ۱۰۴ رسم شده است.

۲۱۶. مشتق تابع مثبت و بنابراین تابع، همیشه صعودی است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\operatorname{Arccotg} \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2}$$

خط $y = \frac{\pi}{2}$ ، مجانب منحنی تابع

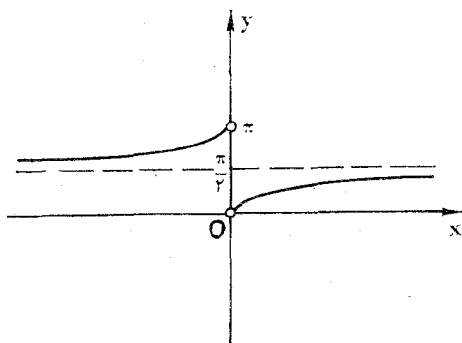
است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = 0 \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} y = \pi$$

تابع در نقطه $x = 0$ منفصل

است (شکل ۱۰۵).



شکل ۱۰۵

۲۱۷. مشتق تابع $y' = -\frac{\sin x}{|\sin x|}$ و بنابراین:

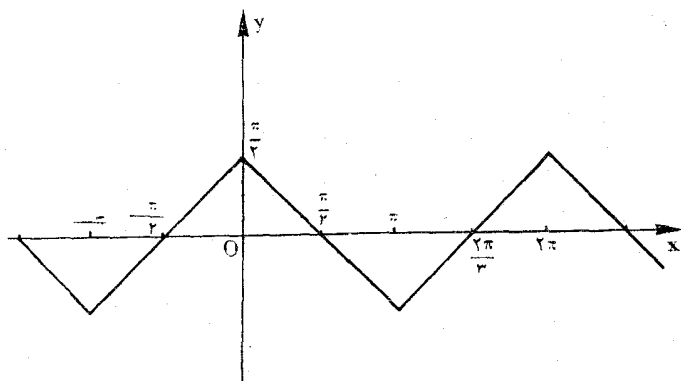
$$2k\pi < x < (2k+1)\pi \Rightarrow y' = -1$$

$$(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi \Rightarrow y' = 1$$

مشتق معنا ندارد $x = k\pi$

کوچکترین دوره تناوب تابع، مساوی 2π است و نمایش تغییرات آن در شکل

۱۰۶ داده شده است.



شکل ۱۰۶

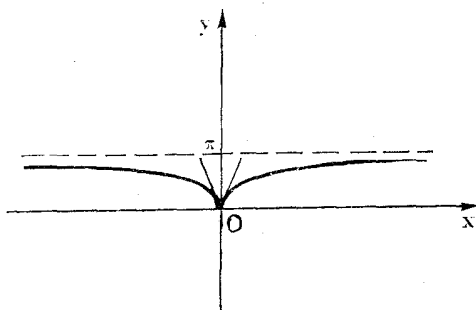
۰۳۱۸. بسادگی معلوم می‌شود که این تابع را می‌توان به صورت

$$y = |2 \operatorname{Arctg} x| \text{ نوشت یعنی:}$$

$$y = \begin{cases} 2 \operatorname{Arctg} x & (x > 0) \\ -2 \operatorname{Arctg} x & (x < 0) \end{cases}$$

تابع به‌ازای همه مقادیر حقیقی x معین است و ضمناً داریم:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} y = \pi \\ & x \rightarrow \pm \infty \end{aligned}$$



شکل ۱۰۷

یعنی خط $y = \pi$ مجانب منحنی تابع است. از طرف دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow +0} y' = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -0} y' = -2$$

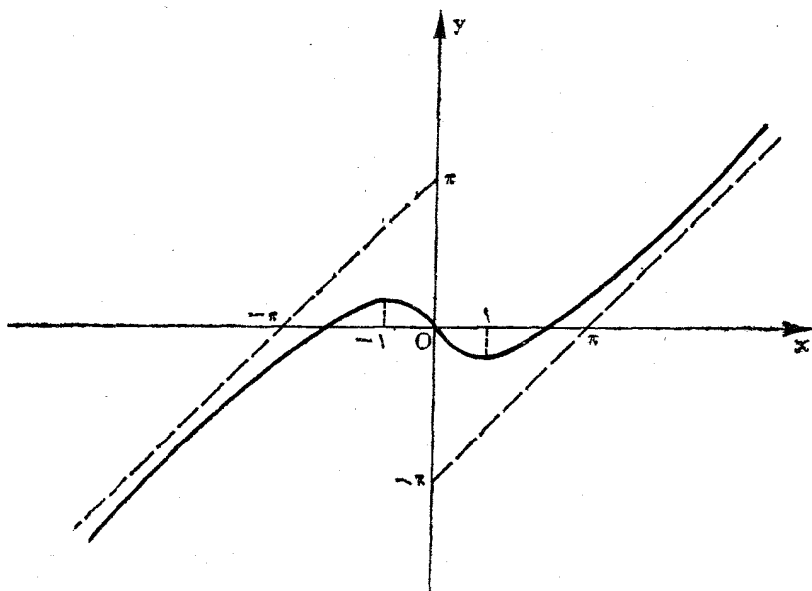
یعنی ضریب زاویه مماس بر منحنی در مبداء مختصات، در ربع اول مساوی ۲ و در ربع دوم مساوی -۲ است. تابع زوج است و بنابراین محور عرض محور تقارن آنست (شکل ۱۰۷).

$$۲۱۹. \quad y' = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}. \quad \text{منحنی تابع در نقطه } (1, \frac{\pi}{2} - 1) \text{ ماکزیمم}$$

و در نقطه $(1, 1 - \frac{\pi}{2})$ می نیمم است و از مبداء مختصات هم می گذرد، با توجه به

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\text{Arctg} x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{Arctg} x) = \frac{\pi}{2}$$

می شود که خطهای $(x \rightarrow +\infty) y = x - \pi$ و $(x \rightarrow -\infty) y = x + \pi$



مجاانبهای منحنی تابع است و ضمناً داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

مبداء مختصات، نقطه عطف و ضمناً مرکز تقارن منحنی تابع است (شکل ۱۰۸).

$$y' = \operatorname{Arccotg} x - \frac{x}{1+x^2} \quad ۰.۲۲۰$$

اگر فرض کنیم:

$$\operatorname{Arccotg} x = t \Rightarrow \cotgt = x \quad (0 < t < \pi)$$

و بدست می‌آید:

$$y' = t - \frac{\cotgt}{1+\cotg^2 t} = t - \frac{\sin t \cos t}{1} = \frac{1}{2}(2t - \sin 2t) > 0$$

(برای قوسهای مثبت همیشه داریم: $\sin u < u$). بنابراین تابع مفروض همیشه صعودی است.

از طرف دیگر داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Arccotg} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

یعنی خط $y = 1$ ($x \rightarrow +\infty$) یکی از مجانبهای منحنی است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot \operatorname{Arccotg} x) = -\infty$$

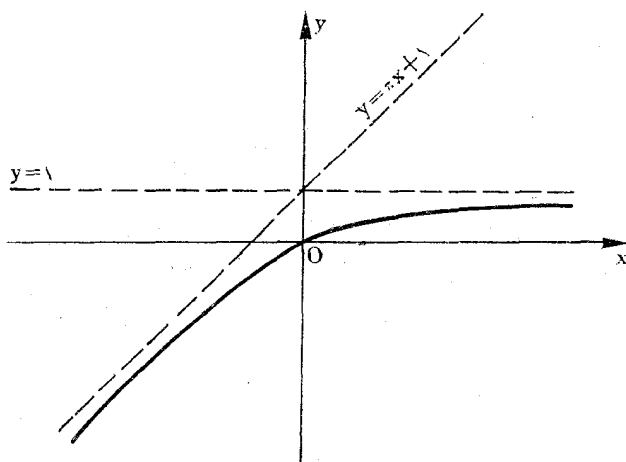
مجاانب مایل منحنی را پیدا می‌کنیم:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \pi$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot \operatorname{Arccotg} x - \pi x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{Arccotg} x - \pi}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

و بنابراین خط $y = \pi x + 1$ ($x \rightarrow -\infty$) مجانب منحنی تابع است (شکل ۱۰۹).



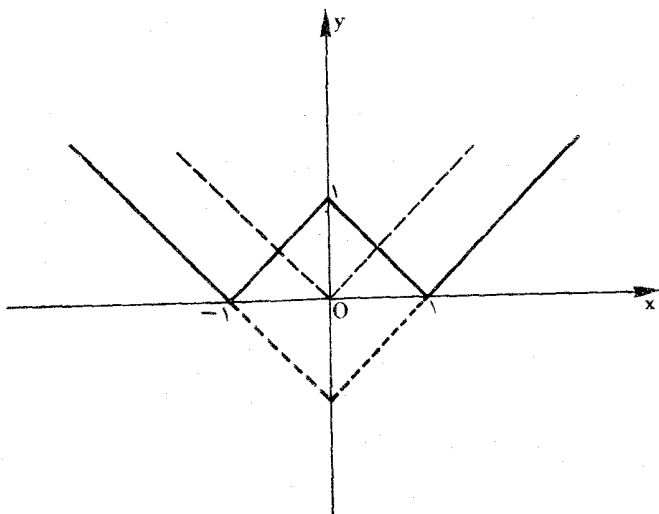
شکل ۱۰۹

۲۲۱. تابع مفروض به سادگی به اینصورت درمی آید:

$$y = \begin{cases} -x - 1 & (x < -1) \\ x + 1 & (-1 < x < 0) \\ -x + 1 & (0 < x < 1) \\ x - 1 & (1 < x) \end{cases}$$

می توان نمایش تغییرات تابع را به اینصورت هم پیدا کرد:

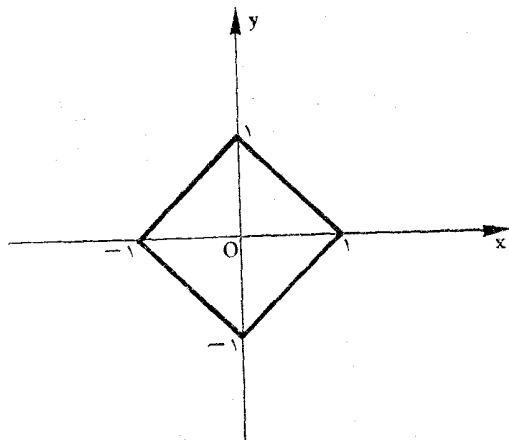
ابتدا $y = |x|$ را رسم می کنیم. (نیمسازهای ربع اول و سوم)، سپس آنرا در امتداد محور عرض، به اندازه ۱- جابجا می کنیم؛ قرینه آنچه را که زیر محور طول است نسبت به محور طول پیدا می کنیم (شکل ۱۱۰).



شکل ۱۱۰

۰۲۲۲. نمایش تغییرات تابع از چهارپاره خط تشکیل شده است:

$$۱) y = -x + ۱ \quad (x > ۰, y > ۰)$$



شکل ۱۱۱

$$۲) y = x + ۱ \quad (x < ۰, y > ۰)$$

$$۳) y = -x - ۱ \quad (x < ۰, y < ۰)$$

$$۴) y = x - ۱ \quad (x > ۰, y < ۰)$$

مکان هندسی $M(x, y)$ که در تابع $|y| + |x| = ۱$ صدق می کند، عبارتست

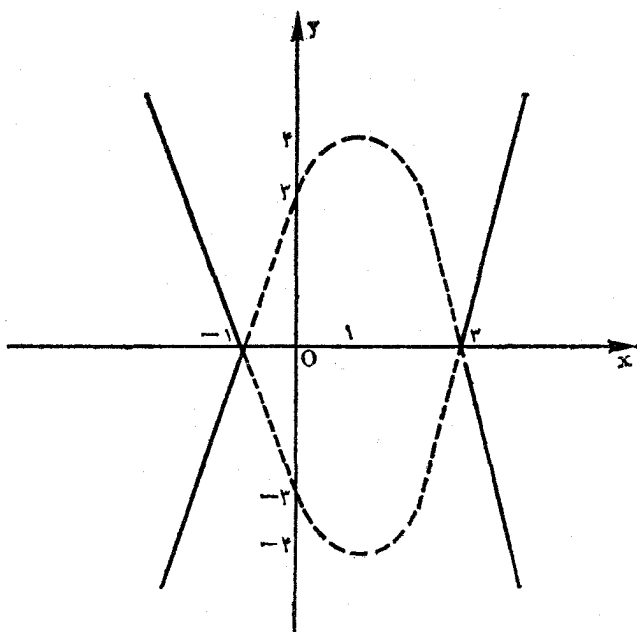
از محیط مربعی به قطر مساوی ۲ که مرکزش در مبدأ مختصات و رأسهایش روی محاورهای مختصات باشد (شکل ۱۱۱).

۴۴۳. از شرط مسأله پیدا است که باید داشته باشیم:

$$x^2 - ۲x - ۳ > ۰ \Rightarrow x < -۱ \text{ و } x > ۳$$

و بنابراین با توجه به فاصله تغییرات x داریم:

$$\begin{cases} y = x^2 - ۲x - ۳ & (y > ۰) \\ y = -x^2 + ۲x + ۳ & (y < ۰) \end{cases}$$



شکل ۱۱۲

نمایش تغییرات تابع در شکل ۱۱۲ داده شده است.

۲۲۴. تابع زوج است زیرا:

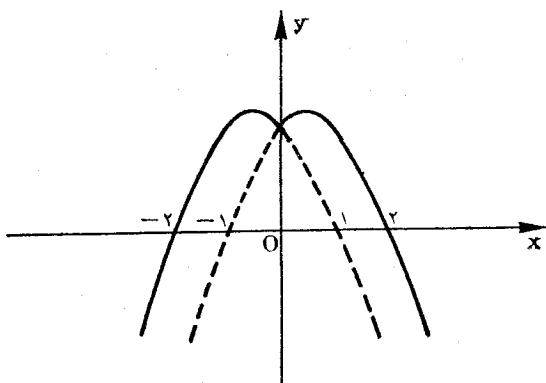
$$f(-x) = (1 + |-x|)(2 - |-x|) = (1 + |x|)(2 - |x|) = f(x)$$

و بنابراین محور عرض، محور تقارن منحنی است و داریم:

$$\begin{cases} y = (1+x)(2-x) & (x \geq 0) \\ y = (1-x)(2+x) & (x < 0) \end{cases}$$

نمایش تغییرات تابع در شکل ۱۱۳ داده شده است. منحنی تابع دارای دوماکزیم:

$(\frac{1}{4}, \frac{9}{4})$ و $(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4})$ و یک می‌نیم: $(0, 2)$ است.

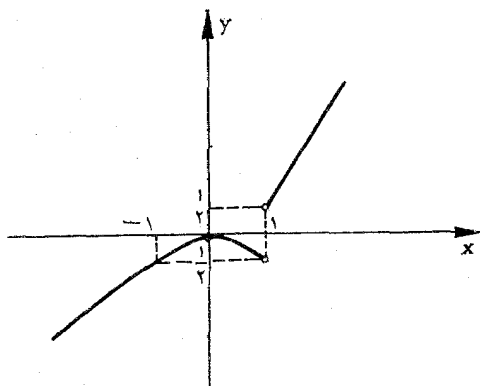


شکل ۱۱۳

۲۲۵. تابع به‌ازای همه مقادیر x بجز $x=1$ معین است:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & (x > 1) \\ -\frac{1}{4}x^2 & (x < 1) \end{cases}$$

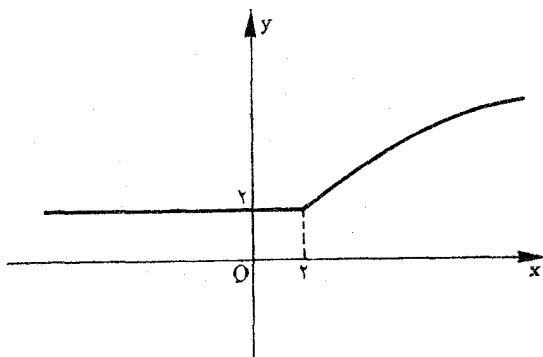
شکل ۱۱۴ نمایش تغییرات تابع را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱۴

۲۲۶. داریم (شکل ۱۱۵):

$$y = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} & (x \geq 2) \\ 2 & (x < 2) \end{cases}$$



شکل ۱۱۵

۲۲۷. چون داریم:

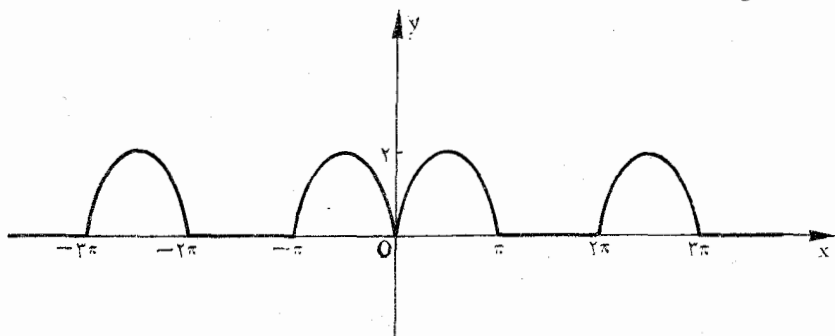
$$\begin{aligned} |\sin(-x)| + \sin|-x| &= |-\sin x| + \sin|x| = \\ &= |\sin x| + \sin|x| = y \end{aligned}$$

بنابراین تابع زوج و منحنی نمایش تغییرات آن، نسبت به محور عرض، متقارن است.

کوچکترین دوره تناوب تابع برابر است با 2π و بنابراین کافی است نمایش تغییرات آنرا در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنیم. از طرف دیگر داریم:

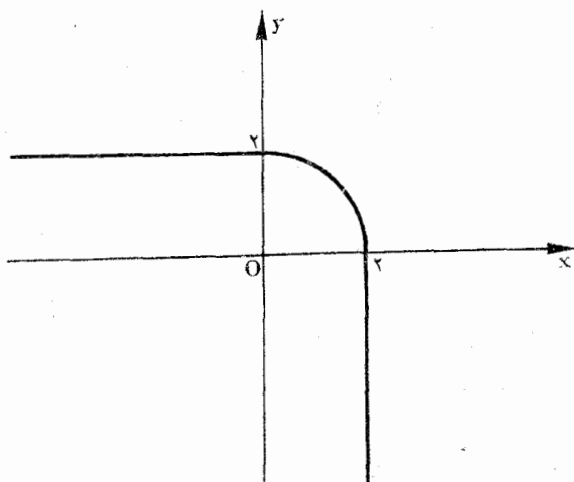
$$y = \begin{cases} 2 \sin x & (0 \leq x \leq \pi) \\ 0 & (\pi < x \leq 2\pi) \end{cases}$$

نمایش تغییرات در شکل ۱۱۶ داده شده است.



شکل ۱۱۶

۱.۲۲۸) در حالت $y \geq 0$ و $x \geq 0$ ، این رابطه به صورت $x^2 + y^2 = 4$



شکل ۱۱۷

درمی آید، یعنی قسمتی از منحنی که در ربع اول قرار دارد، عبارتست از ربع دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع مساوی ۲.

(۲) در حالت $0 < x < 2$ و $y > 0$ ، معادله مفروض به صورت $y = 2 - x$ درمی آید، یعنی در ربع دوم. نمایش تغییرات عبارتست از نیم خطی به موازات محور طول و به فاصله ۲ واحد از آن.

(۳) در حالت $0 < x < 2$ و $y < 0$ ، به رابطه $x = 2 - y$ می‌رسیم، یعنی هیچ نقطه‌ای از ربع سوم در معادله مفروض صدق نمی‌کند.

(۴) در حالت $x > 2$ و $y < 0$ به رابطه $x = 2$ می‌رسیم، یعنی در ربع چهارم، نیم خطی داریم به موازات محور عرض و به فاصله ۲ از آن (شکل ۱۱۷).

$$۲۲۹. \text{ چون } 0 < |y| < 1 - x^2$$

است، بنابراین باید $\frac{|x|}{x} > 0$ باشد

و از آنجا $x > 0$ بدست می‌آید (برای $x = 0$ تابع مفهومی ندارد).

به این ترتیب، معادله مفروض به این صورت درمی آید:

$$|y| = 1 - x^2$$

با توجه به اینکه $|y| > 0$ است، داریم:

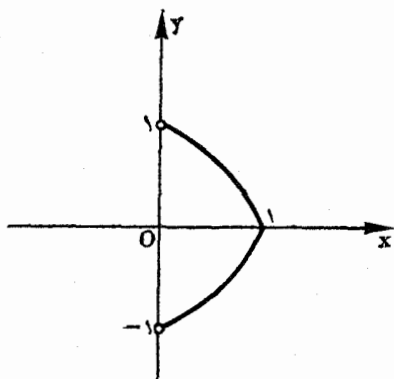
$$0 < 1 - x^2 \text{ و از آنجا با در نظر گرفتن}$$

$x > 0$ بدست می‌آید $0 < x < 1$. اگر $y > 0$ باشد، نمایش تغییرات عبارتست از قسمتی از سهمی $y = 1 - x^2$ که در فاصله $0 < x < 1$ واقع باشد، در حالت $y < 0$ ، قرینه قسمت اول نسبت به محور طول بدست می‌آید (شکل ۱۱۸).

۲۳۰. تابع نسبت به متغیر x زوج و بنابراین نسبت به محور عرض متقارن

است. معادله مفروض را می‌توان به ترتیب چنین نوشت:

$$y|y| - \frac{y}{|x|} + |xy| - 1 = 0$$



شکل ۱۱۸

$$y(|y| - \frac{1}{|x|}) + |x|(|y| - \frac{1}{|x|}) = 0,$$

$$(y + |x|)(|y| - \frac{1}{|x|}) = 0$$

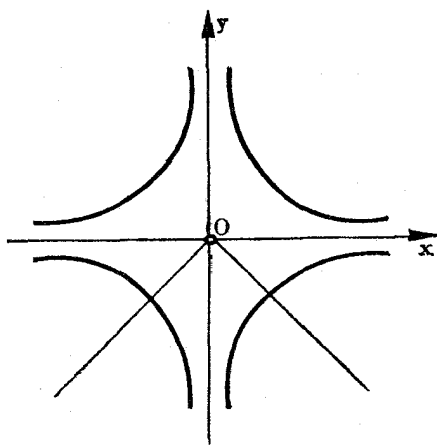
بنابراین معادله مفروض برای $x \neq 0$ به مجموعه دو معادله زیر تبدیل

می‌شود:

$$y + |x| = 0 \text{ و } |y| - \frac{1}{|x|} = 0$$

یعنی نمایش تغییرات آن عبارتست از نیمسازهای دو ربع سوم و چهارم (به استثنای مبدا

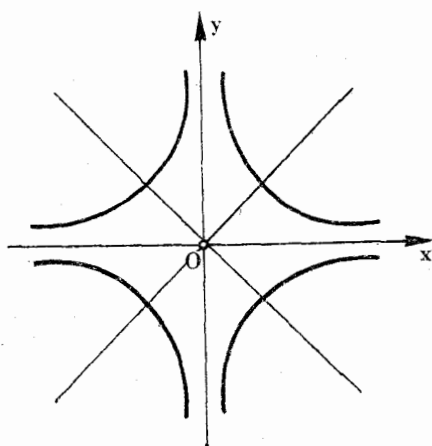
مختصات) و دو هذلولی $y = \frac{1}{x}$ و $y = -\frac{1}{x}$ (شکل ۱۱۹).



شکل ۱۱۹

۲۲۱. روشن است که $x \neq 0$ و $y \neq 0$. باتوجه به اینکه معادله هم

نسبت به x و هم نسبت به y زوج است، بنابراین تابع نسبت بهردو محور طول و عرض، و در نتیجه نسبت به مبدا مختصات، متقارن است. به این ترتیب کافی است نمایش تغییرات آنرا در حالت $x > 0$ و $y > 0$ رسم کنیم و سپس قرینه آنرا نسبت بهردو محور و نسبت به مبدا مختصات پیدا کنیم.



شکل ۱۲۰

اگر $x > 0$ و $y > 0$ باشد، رابطه مفروض چنین می‌شود:

$$y + \frac{1}{y} = x + \frac{1}{x}$$

و از آنجا نتیجه می‌شود

$$y = x \text{ یا } y = \frac{1}{x}$$

بنابراین نمایش تغییرات آن (به ازای $x > 0$ و $y > 0$) عبارتست از

نیمساز ربع اول (به استثنای مبدا مختصات) و شاخه‌ای از هذلولی $y = \frac{1}{x}$

که در ربع اول قرار دارد (شکل ۱۲۰).

۰۲۳۲. من ذکر می‌شویم که x و

y نمی‌توانند با علامتهای مختلف باشند، زیرا با شرط $x > 0$ داریم:

$$x + |x| = 2x > 0$$

و در نتیجه باید $y > 0$ یا $y + |y| > 0$ باشد.

به این ترتیب تنها دو حالت

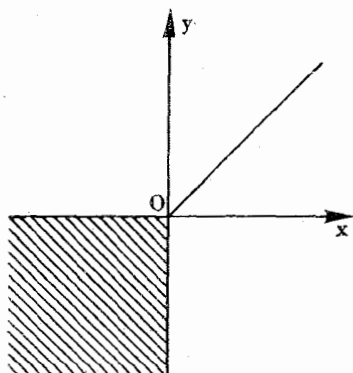
داریم:

(۱) اگر $x \geq 0$ و $y \geq 0$ باشد به

معادله $y = x$ می‌رسیم که نمایش تغییرات آن عبارتست از نیمساز ربع اول.

(۲) اگر $x < 0$ و $y < 0$ باشد، رابطه فرض همیشه برقرار است، یعنی

مختصات تمام نقطه‌های واقع در ربع سوم (و خود نیم محوره‌های Ox' و Oy')



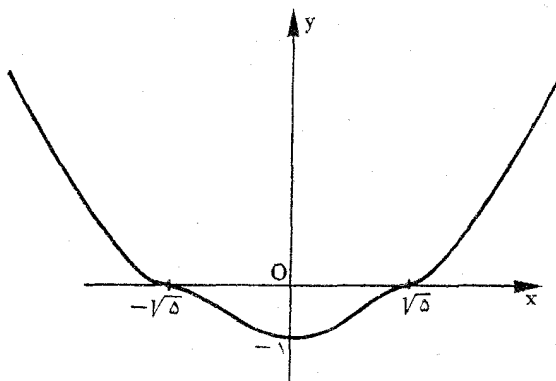
شکل ۱۲۱

در رابطه صدق می‌کند (شکل ۱۲۱).

۲۳۳. مشتق تابع $y' = \frac{6x}{125}(x^2 - 5)^2$ و بنابراین نقطه $(0, -1)$

می‌نیم منحنی است. مشتق دوم تابع $y'' = \frac{24x^2}{125}(x^2 - 5)$ و بنابراین

نقطه‌های $(\pm\sqrt{5}, 0)$ ، نقطه‌های عطف منحنی است و در این نقطه‌ها، منحنی بر محور طول مماس است. تابع نسبت به متغیر x زوج و بنابراین محور عرض



شکل ۱۲۲

محور تقارن منحنی است (شکل ۱۲۲).

۲۳۴. معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$y - x = \sqrt{y^2 + 2(x+1)y + 4x} \quad (1)$$

روشن است که باید $y - x \geq 0$ باشد. دو طرف رابطه (۱) را مجذور می‌کنیم و y را نسبت به x بدست می‌آوریم:

$$y = \frac{x^2 - 4x}{2(2x+1)} \quad (2)$$

از حل نامعادله $y - x \geq 0$ بدست می‌آید:

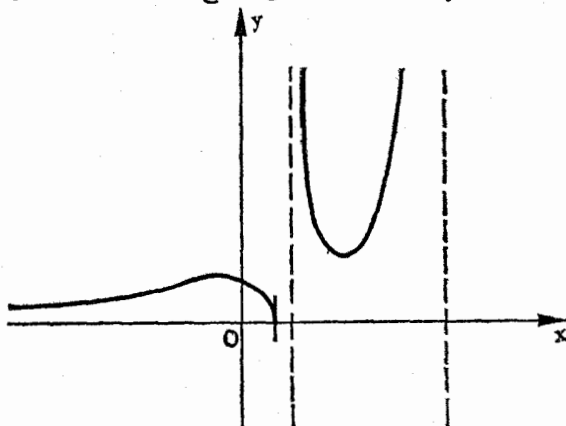
$$\frac{x^2 - 4x}{2(2x + 1)} - x > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ و } -\frac{1}{2} < x \leq 0$$

یعنی تابع در فاصله‌های $x < -2$ و $-\frac{1}{2} < x \leq 0$ معین است. به این ترتیب نمایش تغییرات تابع y ، عبارتست از قسمتی از جدولی (۲) که در فاصله‌های مجاز متغیر باشد.

$$y' = \frac{3x^2 - 4x - 2}{\sqrt{(2 - 3x)(x^2 - 5x + 4)^3}} \quad \text{۲۳۵. مشتق تابع}$$

تابع در فاصله‌های $x \leq \frac{2}{3}$ و $1 < x < 4$ حقیقی است و منحنی آن دارای یک

ماکزیمم و یک می‌نیم است. خطهای $y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$) و $x = 1$ ($y \rightarrow +\infty$) و $x = 4$ ($y \rightarrow +\infty$) مجانبهای منحنی تابع هستند. ضمناً منحنی تابع در



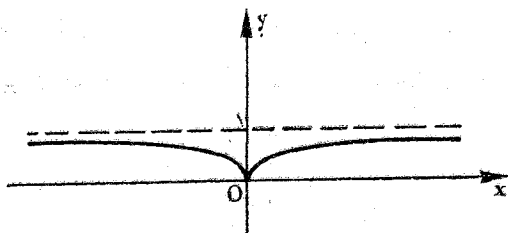
شکل ۱۲۳

نقطه $(\frac{2}{3}, 0)$ مماسی موازی محور عرض دارد (شکل ۱۲۳).

۲۳۶. چون داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +0} y' = \frac{\pi}{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow -0} y' = -\frac{\pi}{2}$$

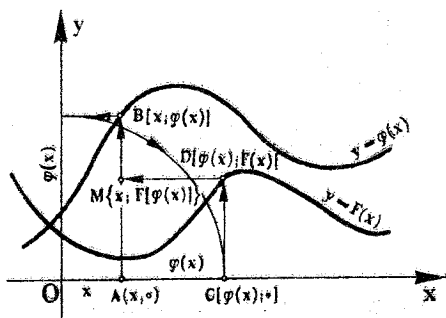
و ضمناً به ازای $x=0$ داریم $y=0$ و مبدأ مختصات نقطه می نیم منحنی تابع است. در این نقطه، مماس بر منحنی در ربع اول با ضریب زاویه $\frac{\pi}{4}$ و در ربع دوم با



شکل ۱۲۴

ضریب زاویه مساوی $-\frac{\pi}{4}$ است. تابع زوج و نسبت به محور عرض متقارن است. خط $y=1$ مجانب منحنی است. منحنی تابع در فاصله $(-\infty, 0)$ نزولی و در فاصله $(0, +\infty)$ صعودی است (شکل ۱۲۴).

۲۲۷. برای رسم منحنی نمایش تغییرات $y = F[\varphi(x)]$ ، ابتدا منحنی



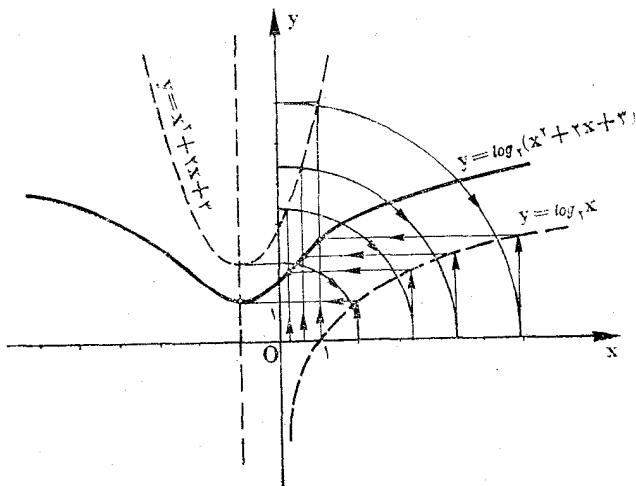
شکل ۱۲۵

تابع های $y = \varphi(x)$ و $y = F(x)$ را رسم می کنیم. نقطه $A(x, 0)$ به وسیله منحنی تابع $y = \varphi(x)$ به نقطه $B[x, \varphi(x)]$ تبدیل می شود. روی محور طول به اندازه عرض نقطه B (یعنی $\varphi(x)$) جدا می کنیم، نقطه $C[\varphi(x), 0]$ بدست می آید. نقطه اخیر به وسیله منحنی تابع $y = F(x)$ به نقطه

$D[\varphi(x), F(\varphi(x))]$ تبدیل می شود. از نقطه D موازی محور طول رسم می کنیم تا AB را در M قطع کند، نقطه $M[x, F(\varphi(x))]$ یکی از نقطه های منحنی تابع $y = F[\varphi(x)]$ خواهد بود. رسم را می توان روی یک دستگاه یا دستگاههای

مختلف (منتهی با مقیاسهای مساوی) برای $y = \varphi(x)$ ، $y = F(x)$ و $y = F[\varphi(x)]$ انجام داد.

(a) چون عبارت $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$ همیشه مثبت و حداقل آن مساوی ۲ می باشد، تابع $y = \log_2(x^2 + 2x + 3)$ برای همه مقادیر حقیقی x معین و حدود تغییرات تابع $1 = \log_2 2 \leq y < +\infty$ است.



شکل ۱۲۶

برای رسم منحنی تابع مفروض از منحنی تابعهای

$$y = \varphi(x) = x^2 + 2x + 3$$

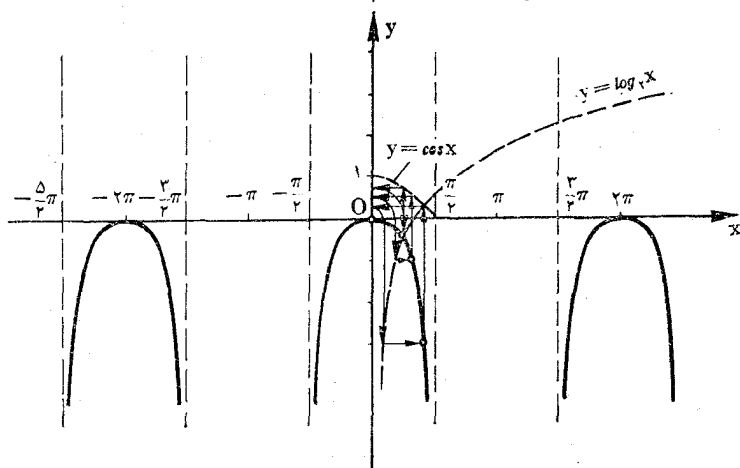
$$y = F(x) = \log_2 x$$

استفاده می کنیم. چون خط $x = -1$ محور تقارن سهمی $y = x^2 + 2x + 3$ است، همین خط محور تقارن منحنی تابع مفروض هم خواهد بود. تابع مفروض برای $x < -1$ از $+\infty$ تا ۱ نزولی و برای $x > -1$ از ۱ تا $+\infty$ صعودی است. نقطه $(-1, 1)$ می نیم منحنی تابع مفروض است.

(b) تابع $y = \log_2(\cos x)$ در فاصله ای از متغیر x معین است که

$0 < \cos x \leq 1$ باشد، یعنی در فاصله $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$. چون

$0 < \cos x \leq 1$ ، منحنی تابع مفروض تنها در زیر محور طول ($y \leq 0$) قرار دارد. تابع زوج است و کوچکترین دوره تناوب آن $T = 2\pi$ است، بنابراین کافی است منحنی آنرا در نیمی از دوره تناوب رسم کنیم. خطهای به صورت $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مجانبهای منحنی تابع هستند. در فاصله $0 < x < \frac{\pi}{2}$ تابع از 0 تا $-\infty$ نزولی است. برای رسم منحنی تابع مفروض از منحنی تابعهای $y = \varphi(x) = \cos x$ و $y = F(x) = \log_2 x$ استفاده می‌کنیم (شکل ۱۲۷).



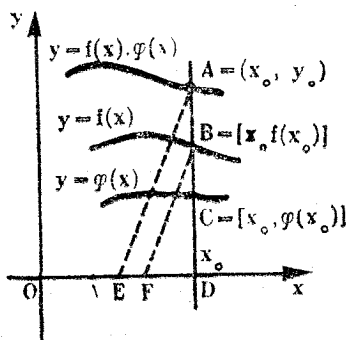
شکل ۱۲۷

با در دست داشتن منحنی تابعهای $y = f(x)$ و $y = \varphi(x)$ می‌توان منحنی تابع $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ را هم رسم کرد.

فرض کنید، تابعهای $f(x)$ و $\varphi(x)$ ، در نقطه x_0 ، مقادیر $f(x_0)$ و $\varphi(x_0)$ را (که مخالف صفرند) قبول کنند، در این صورت تابع $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ در نقطه x_0 ، مقدار $y_0 = f(x_0) \varphi(x_0)$ را خواهد داشت. از آنجا می‌توان نوشت:

$$|y_0| \times 1 = |f(x_0)| \times |\varphi(x_0)| \Rightarrow \frac{1}{|\varphi(x_0)|} = \frac{|f(x_0)|}{|y_0|}$$

پاره خط $|y_0|$ ، به عنوان جزء چهارم تناسبی که سه جزء اول آن 1 و $|\varphi(x_0)|$ و



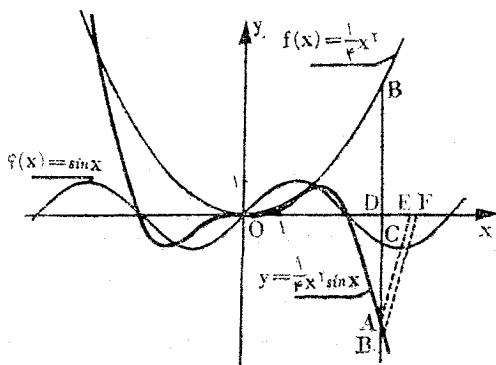
شکل ۱۲۸

$|f(x_0)|$ است، بدست می‌آید (۱) به اندازه واحد انتخابی درمحوره‌های مختصات است). علاوه بر این، عرض y_0 روی دستگاه‌محوره‌های مختصات، درحالت هم علامت بودن $f(x_0)$ و $\varphi(x_0)$ بالای x_0 قرار می‌گیرد و در حالتی که $f(x_0)$ و $\varphi(x_0)$ مختلف علامه‌اند، در زیر x_0 . برای حالت $f(x_0) > 0$ و $\varphi(x_0) > 0$ به شکل

۱۲۸ توجه کنید. در آنجا $DC = \varphi(x_0)$ و $DB = f(x_0)$ ، روی محور طول، پاره‌خطهای $DE = DC = \varphi(x_0)$ و $DF = 1$ را جدا می‌کنیم. نقطه‌های B و F را بهم وصل و از نقطه E خطی موازی BF رسم می‌کنیم تا نقطه A بدست آید؛ یکی از نقطه‌های منحنی تابع $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ است.

در شکل ۱۲۹ منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{1}{\pi} x^2 \sin x$ به کمک منحنی

تابعهای $f(x) = \frac{1}{\pi} x^2$ و $\varphi(x) = \sin x$ رسم شده است.



شکل ۱۲۹

تابع $y = \frac{1}{\pi} x^2 \sin x$ فرد است و مبدأ مختصات، مرکز تقارن آنست،

بنابراین کافی است، منحنی را تنها برای $x > 0$ رسم کنیم.

$$y = \frac{f(x) \cdot \psi(x)}{\varphi(x)}$$

بهمین روش می‌توان تابعهای به صورت

$$y = \frac{1}{\varphi(x)} \quad \text{و} \quad y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

مورد استفاده قرار می‌گیرند، بترتیب چنین‌اند:

$$\varphi(x_0) : f(x_0) = \psi(x_0) : y_0 ; \quad \varphi(x_0) : f(x_0) = 1 : y_0 ;$$

$$\varphi(x_0) : 1 = 1 : y_0$$

(در همهٔ این حالتها، ساختمان نقطه‌هایی انجام می‌شود، که برای آن $\varphi(x_0) \neq 0$ باشد).

۲۳۸. a) تابع مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$y = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & (x \leq 0) \\ x^2 - 4x + 3 & (x > 0) \end{cases}$$

بنابراین، باید منحنی نمایش تغییرات این دوسهمی را، درفاصله‌های مربوطه رسم کرد (شکل ۱۳۰).

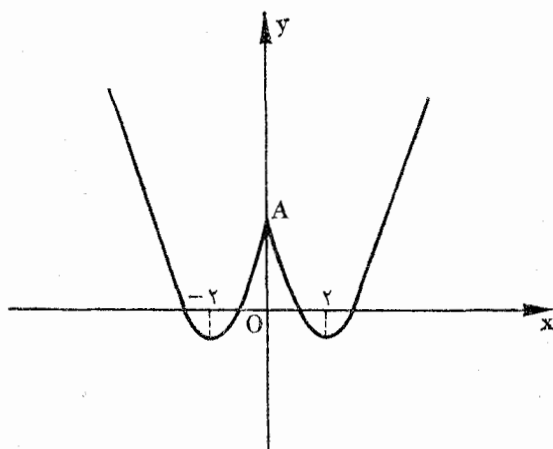
c) b) ازروی شکل بسادگی معلوم می‌شود:

x	$-\infty$	-۲	۰	۲	$+\infty$
y	نزولی		صعودی	نزولی	صعودی
			Min	Max	Min

$$y = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 3$$

d) مماس بر منحنی در نقطهٔ A نامعین است، ولی اگر x ازطرف مقادیر

منفی، بسمت صفر میل کند، y' (یعنی ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی) بسمت ۴،
و اگر x ازطرف مقادیر مثبت، بسمت صفر میل کند، y' بسمت ۴ - میل می‌کند.



شکل ۱۳۰

به این ترتیب داریم:

$$\text{معادله خط مماس} \begin{cases} y = 4x + 3 & (x \rightarrow -\infty) \\ y = -4x + 3 & (x \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

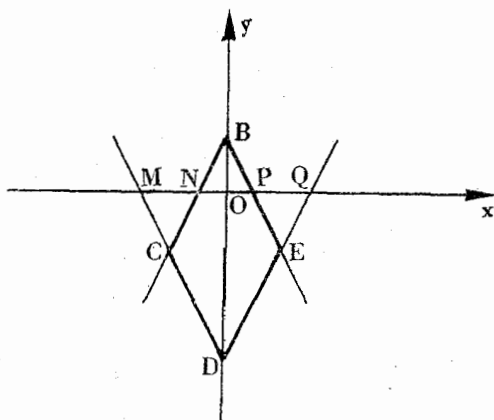
(e) نقطه‌های برخورد منحنی با محور طول چنین است:

$$M \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ و } N \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ و } P \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ و } Q \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

مماسهای بر منحنی در نقطه‌های M و P با هم موازی و به ضریب زاویه مساوی ۲- هستند. همچنین مماسهای در نقطه‌های N و Q به ضریب زاویه ۲ و با هم موازی‌اند. بنابراین چهار ضلعی حاصل، یک متوازی‌الاضلاع می‌شود. مختصات رأس‌های این متوازی‌الاضلاع بسادگی بدست می‌آید:

$$B \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ و } C \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \end{vmatrix} \text{ و } D \begin{vmatrix} 0 \\ -6 \end{vmatrix} \text{ و } E \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \end{vmatrix}$$

و به روشنی معلوم است که قطرهای این متوازی‌الاضلاع بر هم عمودند و بنابراین یک لوزی است (شکل ۱۳۱).



شکل ۱۳۱

۲۳۹. a) تابع برای $x < -1$ و $x > 2$ حقیقی و معین است. مشتق

تابع به صورت $y' = \frac{(x-1)(2x^2-x+9)}{2(x^2-x-2)\sqrt{x^2-x-2}}$ در می‌آید و بنابراین

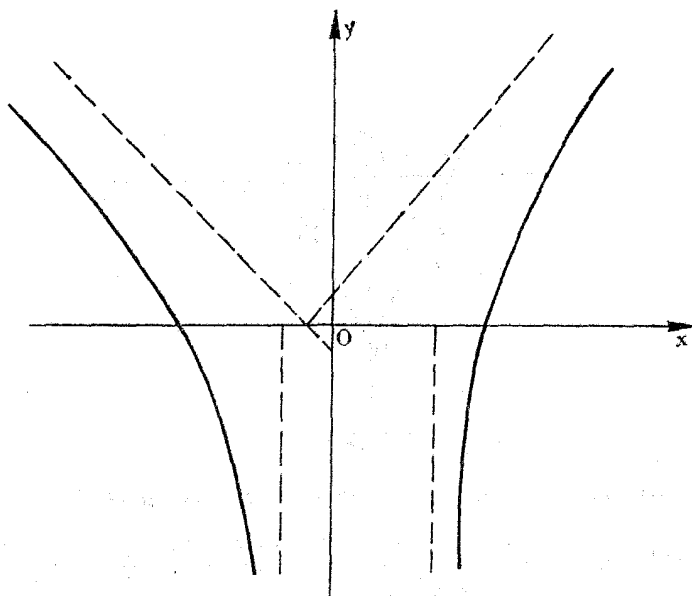
تابع مفروض برای $x < -1$ ، نزولی و برای $x > 2$ ، صعودی است. از طرف دیگر داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1, 2} y = -\infty$$

یعنی خطهای $x = -1$ ($y \rightarrow -\infty$) و $x = 2$ ($y \rightarrow -\infty$) مجانبهای منحنی تابع هستند. منحنی تابع، دو مجانب دیگر هم دارد که بسادگی بدست می‌آید:

$$\left| \begin{array}{l} y = x + \frac{1}{2} \\ x \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad \text{و} \quad \left| \begin{array}{l} y = -x - \frac{1}{2} \\ x \rightarrow -\infty \end{array} \right.$$

منحنی نمایش تغییرات تابع در شکل ۱۳۲ داده شده است.



شکل ۱۳۲

(b) اگر در معادله درجه چهارم مفروض، m را بر حسب x بدست آوریم،

چنین می شود:

$$m = \pm \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

و بسادگی معلوم می شود که اگر قرینه منحنی شکل ۱۳۲ را نسبت به محور طول

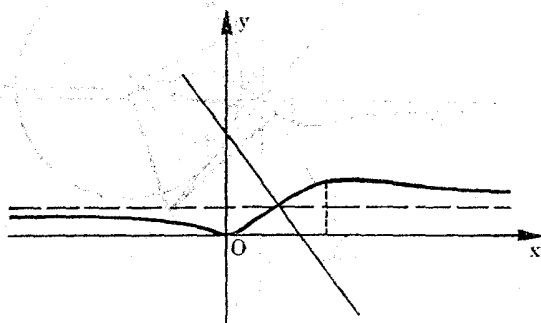
در همان دستگاه رسم کنیم، منحنی تابع $y = \pm \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$ بدست می آید

که با خط $y = m$ ، به ازای همه مقادیر $m (m \neq 0)$ چهار نقطه برخورد دارد.

(a ۲۴۰) مشتق تابع $y' = \frac{x(2-x)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$ می شود و بنابراین

نقطه های $O(0,0)$ و $M(2,1)$ بترتیب نقطه های می نیم و ماکزیم منحنی آن

هستند (شکل ۱۳۳). منحنی تنها يك مجانب به معادله $۲y - ۱ = ۰$ دارد و آن را در نقطه $(۱, \frac{1}{۲})$ قطع می‌کند. خط $۲y + ۴x = ۵$ هم روی شکل رسم شده است.



شکل ۱۳۳

(b) معادله منحنی را می‌توان به این صورت نوشت:

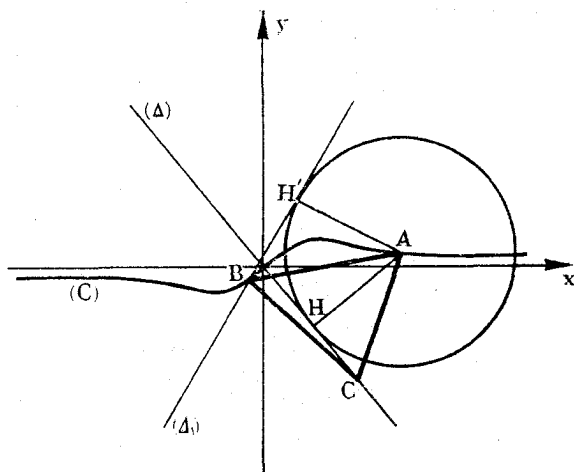
$$y = \frac{1}{2} + \frac{x-1}{(x-1)^2 + 1}$$

برای اینکه این معادله به صورت ساده‌تری درآید، $x-1 = X$ و

$y - \frac{1}{2} = Y$ می‌گیریم؛ در این صورت معادله‌های منحنی و خط چنین می‌شود:

$$Y = \frac{X}{X^2 + 1} \text{ (c)}, Y = -2X \text{ (Δ)}$$

در شکل ۱۳۴، منحنی تابع (c) و خط (Δ) رسم شده است. اگر نقطه A را روی منحنی تابع (c) اختیار کنیم و فرض را بر این بگیریم که مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، مثلث مورد نظر باشد، روشن است که اگر این مثلث را به اندازه ۶۰ درجه دور نقطه A و در خلاف جهت مثلثاتی دوران دهیم، نقطه C بر نقطه B منطبق می‌شود و چون نقطه C بر خط (Δ) واقع است، نقطه B عبارتست از نقطه برخورد خط (Δ) با منحنی (c)، بعد از آنکه خط (Δ) را دور نقطه A و در خلاف جهت مثلثاتی به اندازه ۶۰ درجه دوران دهیم تا به وضع (Δ_۱) درآید.



شکل ۱۳۴

از لحاظ جبری هم می‌توان، همین روش هندسی را، منتهی با زبان تحلیلی دنبال کرد. همچنین می‌توان، معادله خط AB را به صورت $y = mx$ در نظر گرفت (اگر بخواهیم این خط از نقطه دیگری از منحنی (c) عبور کند، می‌توان مبداء مختصات را به آنجا منتقل کرد تا معادله AB به صورت $y = mx$ درآید). در این صورت مختصات نقطه‌های A و B چنین می‌شود:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{x^2 + 1} \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow A \left| \sqrt{\frac{1-m}{m}} \right|$$

$$B \begin{vmatrix} -\sqrt{\frac{1-m}{m}} \\ -\sqrt{m(1-m)} \end{vmatrix}$$

نقطه C را روی خط (Δ) به مختصات $(\alpha, -2\alpha)$ می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$AB = AC = BC$$

$$\begin{cases} AC^2 = \left(\alpha - \sqrt{\frac{1-m}{m}}\right)^2 + \left(2\alpha + \sqrt{m(1-m)}\right)^2 \\ BC^2 = \left(\alpha + \sqrt{\frac{1-m}{m}}\right)^2 + \left(2\alpha - \sqrt{m(1-m)}\right)^2 \end{cases}$$

که از تساوی $AC^2 = BC^2$ ، بسادگی بدست می‌آید: $m = \frac{1}{4}$ ، بنابراین داریم:

$$A\left(1, \frac{1}{4}\right) \text{ و } B\left(-1, -\frac{1}{4}\right) \text{ و } AB = \sqrt{5}$$

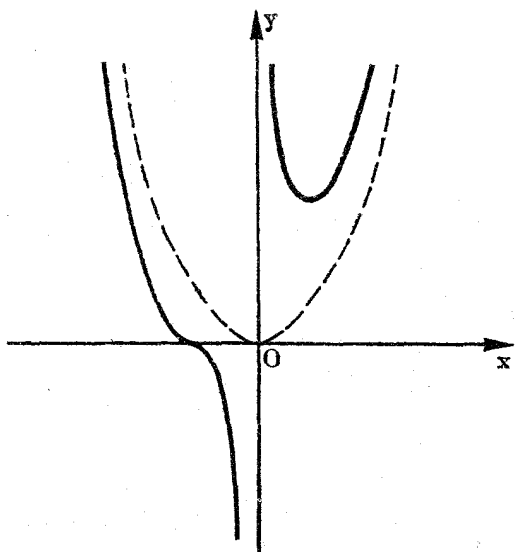
و اگر در رابطه AC^2 ، بجای m و AC^2 ، مقادیرشان را قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$\alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و به این ترتیب مختصات دو نمونه از مثلث متساوی‌الاضلاع مورد نظر بدست می‌آید:

۲۴۱. a) منحنی تابع دارای دو مجانب به معادله‌های $y = x^2$ و $x = 0$

است. منحنی در $(1, 3)$ از نقطه می‌نیم و در $(-\sqrt{2}, 0)$ از نقطه عطف خود می‌گذرد و ضریب زاویه مماس بر منحنی در نقطه اخیر، مساوی $3\sqrt{2} -$ است (شکل ۱۳۵).



شکل ۱۳۵

(b) اگر نقطه تماس را $T(x, \frac{x^2+2}{x})$ بگیریم، ضریب زاویه خط

AT چنین خواهد بود:

$$m_{AT} = \frac{\frac{x^2+2}{x} - a}{x} = \frac{x^2 - ax + 2}{x^2}$$

از طرف دیگر، ضریب زاویه مماس برابر است با مشتق:

$$m_{AT} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^2}$$

و از آنجا، معادله زیر برای تعیین مختصات نقطه‌های تماس بدست می‌آید:

$$x^3 + ax - 4 = 0 \quad (1)$$

اگر ریشه‌های معادله (۱) را x_1, x_2, x_3 بنامیم داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{و} \quad x_1 x_2 x_3 = 4$$

(۱) اگر طول نقطه تماس بسمت صفر میل کند، ضریب زاویه مماس، بسمت بی‌نهایت می‌رود و خط مماس بسمت مجانب منحنی میل می‌کند.

(c) برای اینکه معادله (۱)، سه جواب حقیقی داشته باشد؛ باید داشته باشیم:

$$4p^3 + 27q^2 = 4(a^3 + 108) < 0$$

بنابراین برای $a > -3\sqrt[3]{4}$ ، تنها يك مماس و برای $a < -3\sqrt[3]{4}$ ، سه مماس و برای $a = -3\sqrt[3]{4}$ ، دو مماس می‌توان بر منحنی رسم کرد (در حالت اخیر يك مماس ساده و يك مماس مضاعف وجود دارد). برای حالت $a = -3\sqrt[3]{4}$ معادله (۱) يك ریشه مضاعف خواهد داشت و این ریشه مضاعف، همان ریشه مشترك معادله و مشتق است. و نقطه‌های تماس بسادگی بدست می‌آید:

$$a = -3\sqrt[3]{4} \Rightarrow T_1 \begin{vmatrix} -\sqrt[3]{2} \\ 0 \end{vmatrix} \text{ و } T_2 \begin{vmatrix} 2\sqrt[3]{2} \\ \frac{9}{2}\sqrt[3]{4} \end{vmatrix}$$

و همان‌طور که دیده می‌شود، T_1 همان نقطه عطف منحنی است.

(۲۴۲. a) مختصات نقطه (۲، ۱)، در معادله منحنی صدق می‌کند و مشتق

تابع به ازای $x=2$ برابر صفر می‌شود. از آنجا بسادگی بدست می‌آید: $a=1$ ، $b=2$

(b) منحنی نمایش تغییرات تابع در شکل ۱۳۶ داده شده است. نقطه

(۲، ۱) ماکزیمم منحنی و خطهای $(y \rightarrow -\infty)x=0$ ، $(y \rightarrow -\infty)x=1$

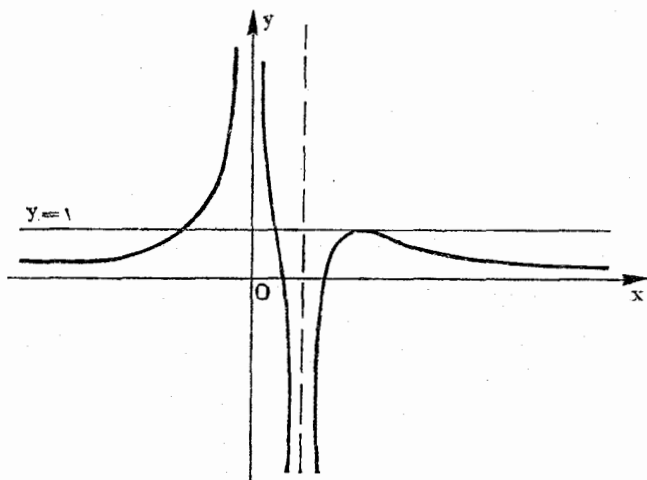
و $y=0$ ، مجانبهای منحنی‌اند.

(c) جهت تقعر منحنی در فاصله‌های $x < 0$ و $0 < x < \frac{2}{2+\sqrt[3]{2}}$

بطرف جهت مثبت محور عرض و در فاصله‌های $x > \frac{2}{2-\sqrt[3]{2}}$

$1 < x < \frac{2}{2-\sqrt[3]{2}}$ و $\frac{2}{2+\sqrt[3]{2}} < x < 1$ بطرف جهت منفی محور عرض

است.



شکل ۱۳۶

(d) از شکل ۱۳۶ پیداست که معادله $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = 1$ ، ریشه مضاعف

$x=2$ دارد. اگر معادله را منظم کنیم چنین می‌شود.

$$x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 16x - 8 = 0$$

که به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(x-2)^2(x^2+2x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_2=2 \\ x_{3,4}=-1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

۰۲۴۳ (a) منحنی نمایش تغییرات هردو تابع در شکل ۱۳۷ رسم شده است.

(b) هر دو تابع، فردند و بنابراین مبداء مختصات، مرکز تقارن هردو

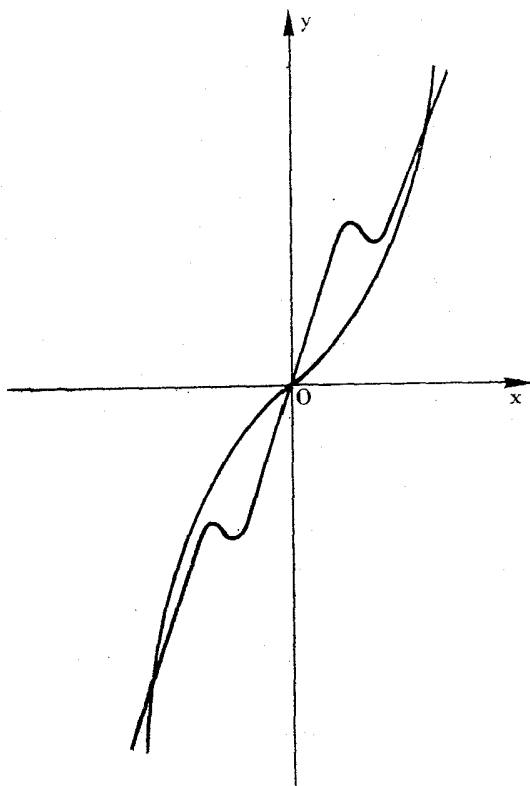
منحنی است.

(c) معادله خطی که از نقطه $A(1,3)$ با ضریب زاویه m عبور کند،

چنین است.

$$y = mx - m + 3$$

برای اینکه، این خط بر منحنی تابع $y = 3x^3$ مماس باشد، باید از حل معادله



شکل ۱۳۲

خط بامعادله منحنی (به عنوان دومعادله دوجوهولی)، به معادله ای برسیم که يك ریشه مضاعف داشته باشد. این معادله چنین است:

$$3x^3 - mx + m - 3 = 0$$

با توجه به اینکه، یکی از ریشه های این معادله مساوی ۱ (طول نقطه A) می باشد، بسادگی قابل تجزیه است:

$$(x-1)[3x^2 + 3x - (m-3)] = 0 \quad (۱)$$

برای اینکه، معادله (۱)، يك ریشه مضاعف داشته باشد، باید یا یکی از ریشه های عبارت داخل کروه، مساوی ۱ شود و یا اینکه همین عبارت، ریشه

مضاعف داشته باشد که در اینصورت به دوجواب زیر می‌رسیم:

$$m_1 = 9, m_2 = \frac{9}{4}$$

که $m = 9$ همان ضریب زاویه مماس بر منحنی در نقطه A است.

d در حالتی که خط منحنی را، غیر از A ، در دو نقطه دیگر B و C قطع کند، طولهای این دو نقطه، ریشه‌های معادله درجه دوم زیر است:

$$3x^2 + 3x - (m - 3) = 0 \quad (2)$$

اگر ریشه‌های این معادله را x_1 و x_2 بگیریم، داریم:

$$B \left| \begin{array}{c} x_1 \\ mx_1 - m + 3 \end{array} \right. \quad \text{و} \quad C \left| \begin{array}{c} x_2 \\ mx_2 - m + 3 \end{array} \right.$$

و از آنجا، مختصات نقطه M (وسط پاره خط BC) چنین می‌شود:

$$M \left| \begin{array}{l} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{m(x_1 + x_2) - 2m + 6}{2} = -\frac{3}{2}m + 3 \end{array} \right.$$

از طرف دیگر، مقدار m باید چنان باشد، که ریشه‌های معادله (۲) حقیقی بشود (یعنی نقطه‌های برخورد B و C وجود داشته باشد). ریشه‌های معادله (۲) بشرطی حقیقی است که داشته باشیم:

$$9 + 12(m - 3) \geq 0 \Rightarrow m \geq \frac{9}{4}$$

یعنی برای عرض نقطه M ، باید داشته باشیم: $y \leq -\frac{3}{8}$. به این ترتیب معادله

مکان نقطه M با دستگاه زیر مشخص می‌شود:

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad y \leq -\frac{3}{8}$$

مکان عبارتست از نیم خطی از خط $2x + 1 = 0$ که مبدأ آن نقطه $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8})$

است و بطرف پائین امتداد دارد.

۲۴۴. می‌دانیم که نقطهٔ عطف منحنی يك تابع درجه سوم، مرکز تقارن آنست، بنابراین نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم (در صورت وجود) و نقطهٔ عطف منحنی بر يك امتدادند.

برای منحنی تابع $y = x^3 + px + q$ ، نقطهٔ عطف $I(0, q)$ و نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم:

$$M\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}, -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right)$$

$$N\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}, \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right)$$

است و معادلهٔ خطی که از این سه نقطه می‌گذرد بسادگی بدست می‌آید:

$$y = \frac{2p}{3}x + q \quad (I)$$

در حالت کلی تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ بهتر است به این صورت عمل کنیم: مختصات نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم منحنی، در دو معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d - y = 0 & (E_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3ax^2 + 2bx + c = 0 & (E_2) \end{cases}$$

ریشهٔ مشترك این دو معادله، در معادلهٔ $3E_1 - xE_2 = 0$ هم صدق می‌کند، که در این صورت داریم:

$$3E_1 - xE_2 = bx^2 + 2cx + 3d - 2y = 0 \quad (E_3)$$

و از حذف جملهٔ درجه دوم بین (E_2) و (E_3) به معادلهٔ درجه اول زیر می‌رسیم، که همان معادلهٔ خطی است که از نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم منحنی می‌گذرد:

$$y = \frac{2(3ac - b^2)}{9a}x + d - \frac{bc}{9a} \quad (II)$$

از این معادله، می‌توان برای ساده‌تر کردن محاسبهٔ مختصات ماکزیمم و می‌نیمم منحنی تابع درجه سوم استفاده کرد. مثلاً در تابع $y = x^3 - 5x^2 - x + 1$ ، طولهای نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم، جوابهای معادلهٔ $3x^2 - 10x - 1 = 0$ یعنی $x = \frac{5 \pm 2\sqrt{7}}{3}$ می‌باشد. برای تعیین عرضهای این نقطه‌ها می‌توان از معادلهٔ (II) استفاده کرد:

$$y = -\frac{4}{9} \left[\frac{14}{3} (5 \pm 2\sqrt{7}) - 1 \right]$$

۲۴۵. مشتق این تابع به صورت زیر در می‌آید:

$f'(x) = (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c)$
بدون اینکه به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد آید، می‌توان $a > b > c$ فرض کرد، در این صورت بسادگی روشن می‌شود که:

$$f'(a) \cdot f'(b) < 0 \text{ و } f'(b) \cdot f'(c) < 0$$

و این تساویها، به معنای آنست که اولاً $f'(x) = 0$ همیشه دوریشهٔ حقیقی دارد و این دوریشه، یکی بین a و b و دیگری بین b و c قرار دارد (x_1 و x_2 ریشه‌های $f'(x) = 0$ گرفته‌ایم):

$$c < x_1 < b < x_2 < a$$

در حالت $a = b \neq c$ ، یکی از طولهای ماکزیمم و می‌نیمم مساوی a و

دیگری مساوی $\frac{a+c}{2}$ می‌شود. در حالت $a = b = c$ ، منحنی تابع بدون ماکزیمم و می‌نیمم و $x = a$ طول نقطهٔ عطف آن می‌شود.

۲۴۶. منحنی این تابع تنها يك مجانب موازی محور طول دارد ($y = 1$)

و روشن است که مرکز تقارن (در صورت وجود)، باید روی این خط باشد. از طرف دیگر، در حالتی که منحنی دو مجانب موازی محور عرض داشته باشد، باید مرکز

تقارن از این دو مجانب يك فاصله باشد، یعنی طولی مساوی $-\frac{p'}{2}$ داشته باشد. به

این ترتیب مختصات مرکز تقارن (1 ، $-\frac{p'}{2}$) می‌شود، که باید در معادلهٔ منحنی

صدق کند. از آنجا به رابطه زیر می‌رسیم:

$$p'(p-p') = 2(q-q') \quad (۱)$$

در حالتی که منحنی تابع، پیوسته باشد، حتماً دارای يك ماكزیمم و يك می‌نیم است و مرکز تقارن (که در این حالت نقطه عطف منحنی هم می‌باشد)، باید از این دو نقطه يك فاصله باشد و در این صورت هم، همان رابطه (۱) بدست می‌آید.

$$۲۴۲. a) \text{ جواب: } ۰ < a'c' - b'^2 \text{ و } ab' \neq ba'$$

(b) نقطه‌های عطف ریشه‌های $y'' = ۰$ ، یعنی ریشه‌های معادله درجه سوم

زیر هستند:

$$a'(ba' - ab')x^2 + 3a'(ca' - ac')x' + 3a'(cb' - bc')x + ac'^2 - ca'c' - bb'c' + cb'^2 = ۰ \quad (۱)$$

از طرف دیگر، اگر فرض کنیم، سه نقطه عطف بريك استقامت باشند و معادله خطی که از این سه نقطه عبور می‌کند، $y = mx + n$ بگیریم، باید از حل معادله این خط با معادله منحنی تابع، به معادله درجه سومى برسیم، که با معادله (۱) هم‌ارز باشد. از برخورد معادله خط و معادله منحنی، به این معادله می‌رسیم:

$$ma'x^2 + (mb' + na' - a)x' + (mc' + nb' - b)x + nc' - c = ۰ \quad (۲)$$

برای هم‌ارز بودن دو معادله (۱) و (۲) باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \frac{a'(ba' - ab')}{ma'} &= \frac{3a'(ca' - ac')}{mb' + na' - a} = \frac{3a'(cb' - ba')}{mc' + nb' - b} = \\ &= \frac{ac'^2 - ca'c' - bb'c' + cb'^2}{nc' - c} \end{aligned}$$

از دو معادله اول، مقادیر m و n را بدست می‌آوریم؛ این دو معادله را از تساوی کسر اول و دوم، و کسر اول و سوم، منظم می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} [3a'(ca' - ac') - b'(ba' - ab')]m - \\ \quad - a'(ba' - ab')n = -a(ba' - ab') \\ [3a'(cb' - bc') - c'(ba' - ab')]m - \\ \quad - b'(ba' - ab')n = -b(ba' - ab') \end{array} \right.$$

مقادیر m و n چنین خواهد بود:

$$m = \frac{ab' - ba'}{b'^2 - 4a'c'} \quad \text{و} \quad n = \frac{bb' - ac' - 3a'c}{b'^2 - 4a'c'} \quad (3)$$

و اگر این مقادیر را، مثلاً در تساوی دو کسر اول و چهارم قرار دهیم، صحت تساوی بسادگی روشن می‌شود. بنابراین دو معادله (۱) و (۲) به‌ازای مقادیر (۳) هم‌ارزند و معادله خطی که از سه نقطه عطف می‌گذرد چنین است:

$$y = \frac{ab' - ba'}{b'^2 - 4a'c'}x + \frac{bb' - ac' - 3a'c}{b'^2 - 4a'c'}$$

اکنون به محاسبه ضریب زاویه خطی می‌پردازیم، که از نقطه‌های ماکزیم و می‌نیم می‌گذرد.

طولهای نقطه‌های ماکزیم و می‌نیم، از معادله $y' = 0$ ، یعنی معادله زیر بدست می‌آید:

$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + bc' - cb' = 0$$

همچنین عرضهای نقطه‌های ماکزیم و می‌نیم هم از معادله زیر بدست می‌آیند:

$$(b'^2 - 4a'd)y^2 - 2(bb' - 2a'c - 2ac')y + b'^2 - 4ac = 0$$

اگر طولهای ماکزیم و می‌نیم را x_1 و x_2 و عرضهای این دو نقطه را y_1 و y_2 بگیریم

برای محاسبه ضریب زاویه خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، باید $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \quad (1) \quad \text{برای بدست آوردن این معادله، معادله}$$

را نسبت به x منظم می‌کنیم و در آن شرط وجود ریشه مضاعف را می‌نویسیم.

را محاسبه کنیم:

$$y_1 - y_2 = \frac{2\sqrt{(bb' - 2a'c - 2ac')^2 - (b'^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c')}}{b'^2 - 4a'c'}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{2\sqrt{(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')}}{ab' - ba'}$$

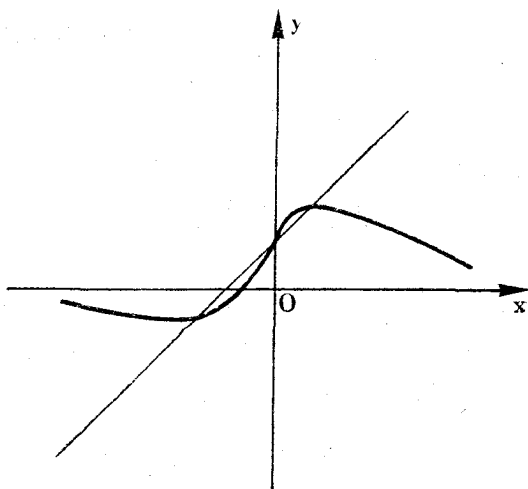
و دیگر بسادگی بدست می‌آید:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2(ab' - ba')}{b'^2 - 4a'c'}$$

و همانطور که می‌بینیم، ضریب زاویه خطی که از نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم می‌گذرد، دو برابر ضریب زاویه خطی است که از سه نقطه عطف می‌گذرد.

۰۲۴۸ a) منحنی نمایش تغییرات تابع در شکل ۱۳۸ رسم شده است. هم

از روی شکل و هم با محاسبه، می‌توان نتیجه گرفت که اگر:



شکل ۱۳۸

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

باشد، خط $y = m$ ، منحنی تابع را در دو نقطه قطع می‌کند ($m \neq 0$)، در حالت $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ ، خط بر منحنی مماس است. به ازای بقیه مقادیر m ، خط $y = m$ ، منحنی تابع را قطع نمی‌کند.

(b) مختصات نقطه P وسط دو نقطه تلاقی N و M چنین می‌شود.

$$P \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2m} \\ y = m \end{array} \right. \Rightarrow y = \frac{1}{2x}$$

(این نتیجه را به این ترتیب هم می‌توانستیم بدست آوریم که از صورت و مخرج تابع اصلی بطور جداگانه مشتق بگیریم). ولی با توجه به بحث قسمت (a)، باید به این معادله، شرط $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < y < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ یا شرطهای $x < -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ یا $x > \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ را اضافه کنیم:

$$P \text{ مکان} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2x} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} < y < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

اگر $Q(x, m)$ را زوج توافقی A ، نسبت به دو نقطه N و M بگیریم، اولاً x' و x'' ، طولهای N و M ، ریشه‌های معادله درجه دوم زیر هستند:

$$2mx^2 - 2x + m - 1 = 0 \quad (I)$$

ثانیاً باید داشته باشیم (رابطه دکارت):

$$\frac{2}{AQ} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$$

که از آنجا بسادگی $x = m - 1$ بدست می‌آید و مکان نقطه Q چنین می‌شود:

$$Q \text{ مکان} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ -\frac{\sqrt{r}+1}{2} < x < \frac{\sqrt{r}-1}{2} \end{cases}$$

(c) معادله درجه دومی که ریشه‌های آن ضرب‌زاویه‌های OM و ON را می‌دهد، چنین است:

$$(m-1)t^2 - 2mt + 2m^2 = 0$$

و اگر m_1 و m_2 بترتیب ضرب‌زاویه‌های OM و ON باشند، بدست می‌آید:

$$m_1 m_2 = \frac{(m_1 + m_2)^2}{(m_1 + m_2 - 2)^2}$$

که رابطه‌ای مستقل از m ، بین ضرب‌زاویه‌هاست.

اگر طولهای نقطه‌های M و N را x' و x'' بگیریم، باتوجه به اینکه این طولها، ریشه‌های معادله (I) هستند، رابطه بین x' و x'' که مستقل از m باشد، چنین است.

$$x' + x'' + 2x'x'' = 1 \quad (1)$$

ازطرف دیگر اگر نقطه‌های ثابت را (که زوج توافقی یکدیگر نسبت به تصویرهای دو نقطه M و N هستند)، P و Q به طولهای α و β و روی محور طول بگیریم، باید داشته باشیم:

$$\frac{2}{PQ} = \frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} \Rightarrow \frac{2}{\beta - \alpha} = \frac{1}{x' - \alpha} + \frac{1}{x'' - \alpha}$$

که از آنجا به رابطه زیر می‌رسیم:

$$(\alpha + \beta)(x' + x'') - 2x'x'' = 2\alpha\beta \quad (2)$$

برای اینکه رابطه‌های (1) و (2) هم ارز باشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{\alpha + \beta}{1} = \frac{-2}{2} = \frac{2\alpha\beta}{1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha\beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین، طولهای نقطه‌های ثابت، ریشه‌های معادله درجه دوم زیر هستند:

$$2x^2 + 2x - 1 = 0$$

که همان معادله $y' = 0$ است. بنابراین دو نقطه ثابت، همان تصویرهای ماکزیمم و مینیمم منحنی روی محور طول هستند.

(d) سه نقطه به طولهای x_1 و x_2 و x_3 را روی خط $y = ax + b$ می‌گیریم، در این صورت این طولها، ریشه‌های معادله درجه سوم زیر خواهند بود:

$$2ax^3 + 2bx^2 + (a-2)x + (b-1) = 0$$

و از آنجا داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \text{ و } x_1 x_2 x_3 = -\frac{b-1}{2a},$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a-2}{2a}$$

که اگر در رابطه مسأله قرار دهیم، صحت آن معلوم می‌شود.

(e) بسادگی تحقیق می‌شود.

(f) سه نقطه عطف منحنی تابع.

(۲۴۹. a) رسم منحنی تابع مشکل نیست و برای بريك امتداد بودن سه نقطه

عطف، به حالت کلی مسأله ۲۴۷ مراجعه کنید.

(b) به ازای $m = 2$ و $m = -1$ ، خط بر منحنی مماس است، به ازای

$-1 < m < 2$ ، خط منحنی را در دو نقطه قطع می‌کند ($m \neq 1$). بالاخره

اگر $m < -1$ یا $m > 2$ باشد، خط و منحنی با یکدیگر برخوردی ندارند.

(c) اگر بین معادله منحنی و خط y را حذف کنیم، به معادله درجه دوم

زیر می‌رسیم:

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m+1) = 0 \quad (۱)$$

اگر طولهای دو نقطه تلاقی خط و منحنی را x_1 و x_2 بگیریم، داریم:

$$x_p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m+1}{m-1} \text{ و } y_p = m$$

که از آنجا مکان نقطه P بدست می‌آید (باتوجه به شرط قسمت b):

$$y = \frac{x+1}{x-1} \quad (-1 < y < 2)$$

در تابعهای کسری به شکل $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ ، وقتی که $y = m$

دو نقطه برخورد داشته باشند، همیشه، معادله مکان وسط دو نقطه برخورد (وقتی که

m تغییر می‌کند)، عبارتست از $y = \frac{2ax + b}{2a'x + b'}$ (در حالت کلی ثابت کنید).

(d) طولهای نقطه‌های A و B بترتیب مساوی x_1 و x_2 هستند (ریشه‌های

معادله (۱)). از طرف دیگر بین ریشه‌های معادله (۱)، رابطه:

$$3(x_1 + x_2) = 2x_1x_2$$

برقرار است. این رابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{2}{OD}$$

که در آن $O(0,0)$ و $D(3,0)$ است. یعنی نقطه ثابت C بر مبداء و نقطه D بر

$(3,0)$ منطبق است.

(e) اگر در حالت قبل، وسط CD را ω بگیریم، باید داشته باشیم:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OC}^2 \Rightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{9}{4}$$

بنابراین، نقطه‌های A و B در دستگاه انعکاس به مرکز $\omega(\frac{3}{2}, 0)$ و قوت $\frac{9}{4}$ ، $p = \frac{9}{4}$

همیشه منعکس یکدیگرند.

(f) دایره به قطر CD ، بر هر دایره‌ای که از A و B بگذرد عمود است (زیرا قطر دایره اول به وسیله هریک از دایره‌های دوم، به نسبت توافقی تقسیم می‌شود). معادله دایره به قطر CD چنین است.

$$x^2 + y^2 = 3x$$

(g) دایره‌های به قطر AB ، به این مناسبت تشکیل یک دسته دایره می‌دهند که اولاهمه آنها بر دایره ثابت به قطر CD عمودند، ثانیاً مرکزهای آنها روی یک خط راست قرار دارند (محور طول). معادله محور اصلی این دایره‌ها $0 = 2x - 3$ است.

۲۵۰. x' و x'' طولهای نقطه‌های A و B ریشه‌های معادله درجه دوم

زیر هستند:

$$tx^2 + x + m - t = 0 \quad (۱)$$

اگر طول نقطه D را x بگیریم، برای اینکه C و D زوج توافقی هم، نسبت به A و B باشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{2}{CD} = \frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} \Rightarrow \frac{2}{x-a} = \frac{1}{x'-a} + \frac{1}{x''-a}$$

$$(x+a)(x'+x'') - 2x'x'' = 2ax \quad \text{و یا:}$$

بجای $x' + x''$ و $x'x''$ ، مقادیرشان را، از معادله (۱)، قرار می‌دهیم:

$$-\frac{x+a}{t} - \frac{2(m+t)}{t} = 2ax \Rightarrow x = \frac{2t - 2m - a}{2at + 1}$$

به این ترتیب، مختصات پارامتری نقطه D و از آنجا، معادله مکان D بدست می‌آید:

$$D \left| \begin{array}{l} x = \frac{2t - 2m - a}{2at + 1} \\ y = t \end{array} \right. \Rightarrow y = \frac{x + 2m + a}{2(1 - ax)}$$

$$\frac{m - \sqrt{m^2 - 1}}{2} < y < \frac{m + \sqrt{m^2 - 1}}{2} \quad \text{البته به این مکان، باید شرط}$$

را اضافه کرد، که شرط حقیقی بودن ریشه‌های معادله (۱) است.

برای اینکه، این مکان به خط راست تبدیل شود، باید $a = 0$ باشد؛ که در این صورت، معادله مکان به این صورت درمی‌آید:

$$y = \frac{1}{2}x + m$$

همچنین با شرط $a^2 + 2ma + 1 = 0$ هم، مکان D ، به خط راستی به معادله $2ay + 1 = 0$ تبدیل می‌شود. این شرط به معنای آنست که نقطه C بر تصویر یکی از دو نقطه ماکزیم و می نیم روی خط $y = t$ منطبق است.

در حالتی که a بسمت بی نهایت میل کند، معادله مکان به صورت $y = -\frac{1}{2x}$

درمی‌آید، در این حالت مکان نقطه D ، همان مکان نقطه‌های ماکزیم و می نیم منحنی است، وقتی که m تغییر می‌کند.

۰۲۵۱. بسادگی روشن می‌شود که دو معادله درجه دوم

$$3x^2 - 2 = 0 \text{ و } x^2 + 2x + a = 0$$

به ازای $a = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{3}$ ، ریشه مشترک دارند. بنابراین اگر a ، یکی

از این دو مقدار را اختیار کند، معادله تابع به صورت یک تابع هموگرافیک در می‌آید:

$$a = -\frac{2 + 2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$a = \frac{-2 + 2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}x - 3\sqrt{2}}{\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

در حقیقت به ازای این دو مقدار a ، مشتق تابع اصلی، عبارت درجه دومی می‌شود که یک ریشه مضاعف دارد:

$$y' = \frac{6x^2 + 2(3a+2)x + 4}{(x^2 + 2x + a)^2}$$

و اگر مبین عبارت درجه دوم صورت y' را Δ فرض کنیم، داریم:

$$\Delta = 4(3a+2)^2 - 96 = 4(3a+2+2\sqrt{6})(3a+2-2\sqrt{6})$$

که به ازای همان مقادیر a ، مساوی صفر می شود و می دانیم که صفر شدن y' به معنای آنست که صورت و مخرج کسر y' ، ریشه مشترک دارند.

از طرف دیگر بسادگی معلوم می شود که برای $a > 1$ ، منحنی تابع مفروض پیوسته، به ازای $a = 1$ ، انفصال مضاعف و به ازای $a < 1$ ، دو مجانب قائم دارد. نتیجه بحث را می توان به این ترتیب خلاصه کرد.

تابع در دو نقطه ناپیوسته است و یک ماکزیمم و یک می نیمم دارد $a < -\frac{2+2\sqrt{6}}{3}$

به تابع هموگرافیک تبدیل می شود $a = -\frac{2+2\sqrt{6}}{3}$

تابع در دو نقطه ناپیوسته است و ماکزیمم و می نیمم ندارد $-\frac{2+2\sqrt{6}}{3} < a < -\frac{2+2\sqrt{6}}{3}$

به تابع هموگرافیک تبدیل می شود $a = \frac{-2+2\sqrt{6}}{3}$

تابع در دو نقطه ناپیوسته است و یک ماکزیمم و یک می نیمم دارد $-\frac{2+2\sqrt{6}}{3} < a < 1$

$$a = 1$$

تابع دارای یک مجانب قائم و یک می نیمم است

تابع پیوسته و دارای یک ماکزیمم و یک می نیمم است $a > 1$

۲۵۲. x'' و x' (طولهای ماکزیمم و می نیمم) و y'' و y' (عرضهای ماکزیمم

و می نیمم). بترتیب ریشه های معادله های درجه دوم زیر هستند:

$$(a+2)x^2 + 2bx - 2b = 0$$

$$4y^2 + 4(a+b)y + a^2 - 4b = 0$$

و بنابراین باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} -\frac{4b}{a+2} + \frac{a^2-4b}{4} = 19 \\ -(a+b) - \frac{4b}{a+2} = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-9 \end{cases}$$

۲۵۳. a معادله تابع را نسبت به a متحد با صفر قرار می‌دهیم، مقادیر x و y نقطه‌های ثابت بدست می‌آید:

$$A(1, 6) \text{ و } B(-1, 2) \quad \text{نقطه‌های ثابت:}$$

برای معادله خطی که از این دو نقطه ثابت می‌گذرد، می‌توان بطور مستقیم عمل کرد، یا در معادله تابع، ضریب درجه دوم را مساوی صفر گرفت (زیرا به ازای مقداری از a که ضریب درجه دوم تابع مساوی صفر شود، بازهم نمایش تغییرات تابع از دو نقطه ثابت می‌گذرد):

$$y = 2x + 4 \quad \text{خطی که از نقطه‌های ثابت می‌گذرد:}$$

b می‌دانیم منحنی سهمی $y = px^2 + qx + r$ ، به ازای مقادیر $p < 0$ ، ماکزیمم و به ازای مقادیر $p > 0$ ، می‌نیمم دارد. بنابراین منحنی تابع مفروض وقتی ماکزیمم دارد که $a < -2$ باشد و وقتی می‌نیمم دارد که $a > -2$ بشود.

$$\left(-\frac{1}{a+2}, -\frac{a^2-3}{a+2}\right) \text{ از طرف دیگر مختصات نقطه اکسترمم تابع}$$

است و بنابراین، معادله مکان اکسترمم چنین می‌شود (که يك هذلولی است):

$$y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x} \quad (1)$$

اگر طول اکسترمم را x بگیریم، داریم:

$$x = -\frac{1}{a+2} \Rightarrow a = -\frac{2x+1}{x}$$

برای اینکه ماکزیمم داشته باشیم، باید نامعادله زیر برقرار باشد:

$$a = -\frac{2x+1}{x} < -2 \Rightarrow x > 0$$

به این ترتیب، قسمتی از منحنی تابع (۱)، که برای آن $x > 0$ است، مربوط به مکان ماکزیمم و قسمتی، که برای آن $x < 0$ است، مربوط به مکان می نیمم است.

۲۵۴. فرض می کنیم، منحنی تابع $y = \frac{4x^2 - mx + m^2}{x - m}$ به ازای

همه مقادیر m بر خط $y = ax + b$ مماس باشد، در این صورت ازحل معادله منحنی و خط، به معادله ای می رسیم که باید یک ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\begin{cases} y = \frac{4x^2 - mx + m^2}{x - m} \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow (a-4)x^2 - [(a-1)m - b]x - (m^2 + bm) = 0,$$

$$\Delta = [(a-1)m - b]^2 + 4(a-4)(m^2 + bm) = (a^2 + 2a - 15)m^2 - 2b(a+5)m + b^2 = 0$$

و برای اینکه، این تساوی به ازای همه مقادیر m ، درست باشد، باید داشته

$$\begin{cases} a^2 + 2a - 15 = 0 \\ 2b(a+5) = 0 \\ b^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3, -5 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{باشیم:}$$

یعنی خطهای $y = -5x$ و $y = 3x$ ، به ازای همه مقادیر m ، بر منحنی مفروض مماس اند.

این دو خط را پوش منحنی مفروض گویند و ما در اینجا به بررسی دقیق تر مفهوم پوش می پردازیم.

پوش

پوش یک منحنی پارامتری $y = f(x)$ ، عبارتست از منحنی ثابتی که بر منحنی $y = f(x)$ ، به ازای همه مقادیر پارامتر آن، مماس باشد. مسأله ۲۵۴ را، با توجه به این تعریف، بررسی می کنیم. صورت مسأله

را به شکل کلی تری مطرح می‌کنیم:

$$(c)y = \frac{4x^2 - mx + m^2}{x - m} \quad \text{مطلوبست معادله پوش منحنی تابع}$$

معادله منحنی (c) را می‌توان به این صورت نوشت (نسبت به پارامتر m منظم کرده‌ایم):

$$m^2 - (x - y)m + (4x^2 - xy) = 0 \quad (۱)$$

از معادله (۱)، که نسبت به m از درجه دوم است، معلوم می‌شود که به هر نقطه از صفحه محورهاى مختصات، دو مقدار m (حقیقی یا موهومی) مربوط می‌شود. برای نقطه‌هائی از صفحه محورهاى مختصات، که این دو مقدار m حقیقی باشد، به این معناست که از هر يك از این نقطه‌ها، دو نمونه از منحنی‌های (c) عبور می‌کند. نقطه‌هائی در صفحه محورهاى مختصات وجود دارد که از آنها، تنها یکی از منحنی‌های (c) عبور می‌کند و این وقتی است که معادله (۱) ریشه مضاعف داشته باشد. این نقطه‌ها باید در معادله زیر صدق کنند (معادله $\Delta = 0$ در مورد (۱)):

$$(x - y)^2 - 4(4x^2 - xy) = 0 \Rightarrow y^2 + 2xy - 15x^2 = 0$$

که از آنجا به دو معادله $y = -5x$ و $y = 3x$ می‌رسیم. این دو خط مکان هندسی نقطه‌هائی از صفحه محورهاى مختصات هستند، که از هر يك از آنها، تنها یکی از منحنی‌های (c) عبور می‌کند. علاوه بر آن روشن است که هر يك از این دو خط (یا بطور کلی مکان) بر منحنی (c) مماس است (زیرا از شرط وجود ریشه مضاعف بدست آمده است). بنابراین، همین مکان، یعنی دو خط $y = -5x$ و $y = 3x$ ، پوش منحنی (c) را تشکیل می‌دهند.

به این ترتیب برای پیدا کردن معادله پوش (بدون اینکه از قبل معلوم باشد که از چه نوع است)، می‌توان معادله منحنی را نسبت به پارامتر آن منظم کرد و سپس شرط وجود ریشه مضاعف را نوشت.

مثال دیگر. پوش سهمی‌های $y = m^2x^2 - 2mx + 2m + 3$ را

پیدا کنید.

معادله را نسبت به m ، منظم می‌کنیم:

$$x^2 m^2 - 2(x-1)m + (3-y) = 0$$

و شرط وجود ریشه مضاعف را در آن می نویسیم:

$$(x-1)^2 - x^2(3-y) = 0 \Rightarrow y = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2}$$

۲۵۵. (a) جواب: منحنی همیشه بردو خط $y = -2x$ و $y = x$ مماس

است.

(b) طولهای ماکزیم و می نیمم ریشه های $y' = 0$ ، یعنی ریشه های معادله

زیر، هستند:

$$2x^2 - 8mx - m^2 = 0 \quad (1)$$

عرضهای ماکزیم و می نیمم هم، ریشه های معادله درجه دوم زیر هستند:

$$y^2 - 16my - 8m^2 = 0 \quad (2)$$

و بنابراین $M(2m, 8m)$ و مکان M به صورت $y = 4x$ می شود. از آنجا که معادله های (۱) و (۲)، همیشه ریشه های حقیقی دارند، تمام خط $y = 4x$ جزء مکان مطلوب است.

(c) همان معادله (۲) از قسمت قبل.

(d) جواب: $D(\frac{2h+1}{2h}, h)$ ، مکان $D: y = \frac{1}{2(x-1)}$ با شرط

$$y > 8 + 6\sqrt{2} \text{ یا } y < 8 - 6\sqrt{2}$$

۲۵۶. (a) ازحل دومعادله، بمعادله درجه سوم زیر می رسم:

$$x^3 - 3x + \frac{5}{4} - m = 0, \quad (1)$$

$$4p^3 + 27q^2 = -4 \times 27 + 27(\frac{5}{4} - m)^2 =$$

$$= 27(m - \frac{1}{4})(m - \frac{9}{4})$$

ازطرف دیگر: اگر ریشه های معادله (۱) را x_1, x_2, x_3 بگیریم، داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 x_2 x_3 = m - \frac{5}{2}$$

از صفر بودن مجموع ریشه‌های يك معادله، معلوم می‌شود که هر سه ریشه نمی‌توانند يك علامت داشته باشند. در جدول زیر تعداد ریشه‌های حقیقی و علامت آنها مشخص شده است:

m	$4p^2 + 27q^2$	$x_1 x_2 x_3$	نتیجه
$-\infty$	+	-	يك ریشه حقیقی منفی
$\frac{1}{2}$	+	-	ریشه مضاعف مثبت و ریشه ساده منفی
$\frac{5}{2}$	-	-	يك ریشه حقیقی منفی و دو ریشه حقیقی مثبت
$\frac{9}{2}$	-	+	يك ریشه حقیقی مثبت و دو ریشه حقیقی منفی
∞	+	+	يك ریشه حقیقی مثبت

(b) مرکز تقارن يك سهمی درجه سوم، همان نقطه عطف منحنی آنست:

$$\omega\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right). \text{ ضریب زاویه مماس بر منحنی، در این نقطه برابر است با } -\frac{27}{4} \text{ و}$$

$$\text{معادله خط مماس: } 54x + 8y = 21$$

۲۵۷. مسأله را می‌توان با روش کلی تعیین پوش يك منحنی پیدا کرد

(حل مسأله ۲۵۴ را ببینید). معادله خط را نسبت به m منظم می‌کنیم:

$$m^2 - (x+1)m + y = 0$$

برای اینکه این معادله، ریشه مضاعف داشته باشد، باید ممیز آن مساوی صفر شود:

$$(x+1)^2 - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

که معادله يك سهمی است، با محوری موازی محور عرض.

مسأله را به این ترتیب هم می‌توانستیم حل کنیم: معادله سهمی مطلوب را

$y = ax^2 + bx + c$ می گیریم.

باید a, b, c را چنان پیدا کنیم که این سهمی به ازای همه مقادیر m بر

خط $y = mx - m(m-1)$ مماس باشد.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx - m(m-1) \end{cases} \Rightarrow ax^2 + (b-m)x + (c+m^2-m) = 0$$

برای اینکه خط بر سهمی مماس باشد، باید این معادله درجه دوم (به ازای

همه مقادیر m) ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\Delta = (b-m)^2 - 4a(c+m^2-m) = 0$$

$$(1-4a)m^2 + 2(2a-b)m + (b^2-4ac) = 0$$

و این تساوی به شرطی، نسبت به m ، یک اتحاد است که داشته باشیم:

$$1-4a=0, 2a-b=0, b^2-4ac=0$$

و از آنجا بدست می آید: $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}$. در نتیجه معادله سهمی مطلوب

چنین می شود:

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

۲۵۸. جواب: خط مفروض به ازای همه مقادیر m ، بر سهمی $y^2 = 12x$

مماس است.

۲۵۹. جواب: خط مفروض همیشه بر هذلولی $xy = 1$ مماس است.

۲۶۰. برای تحقیق در تعداد ریشه های حقیقی این معادله (به ازای مقادیر

مختلف a)، می توان بطریق محاسبه و با تبدیل آن، به معادله ای به صورت

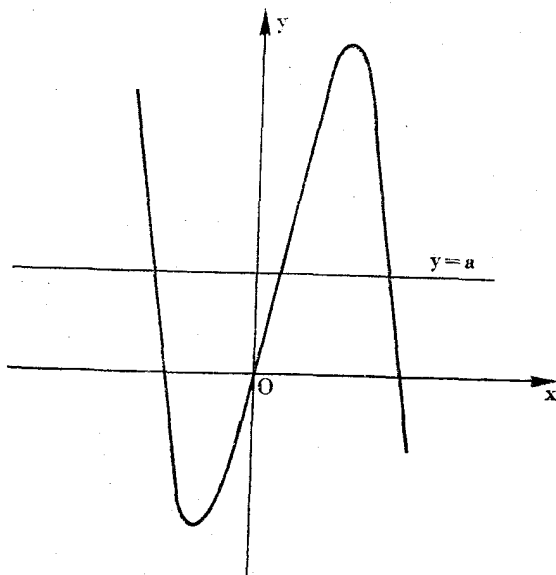
$$x^3 + px + q = 0, \text{ عمل کرد؛ ولی در آن صورت نمی توان علامت ریشه ها را}$$

تشخیص داد. بنابراین حل مسأله را به کمک بررسی وضع برخورد منحنی تابع

$$y = -x^3 + x^2 + 5x \text{ و خط } y = a \text{ انجام می دهیم.}$$

منحنی نمایش تغییرات تابع درجه سوم در شکل ۱۳۹ داده شده است.

این منحنی در نقطه $(-۱, -۳)$ می‌نیمم، در نقطه $(\frac{۵}{۳}, \frac{۱۷۵}{۲۷})$ ماکزیمم است و در نقطه‌های به طول‌های $\frac{۱ \pm \sqrt{۲۱}}{۲}$ و مبداء مختصات، محور طول را قطع می‌کند.



شکل ۱۳۹

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله مفروض در جدول داده شده است:

a	نتیجه بحث	
$-\infty$	يك ریشه حقیقی مثبت	
-۳	دو ریشه حقیقی منفی و يك ریشه حقیقی مثبت	ریشه مضاعف منفی و ریشه ساده مثبت
۰	دو ریشه حقیقی مثبت و يك ریشه حقیقی منفی	يك ریشه منفی، يك ریشه مثبت و يك ریشه صفر
$\frac{۱۷۵}{۲۷}$	دو ریشه حقیقی مثبت و يك ریشه حقیقی منفی	ریشه مضاعف مثبت و ریشه ساده منفی
۲۷	يك ریشه حقیقی منفی	
$+\infty$		

همانطور که از جدول دیده می‌شود، معادله مفروض به ازای $a = -3$ و

$a = \frac{175}{27}$ ریشه مضاعف دارد؛ در این دو حالت، ریشه‌ها چنین‌اند:

$$a = -3 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1, x_3 = 3$$

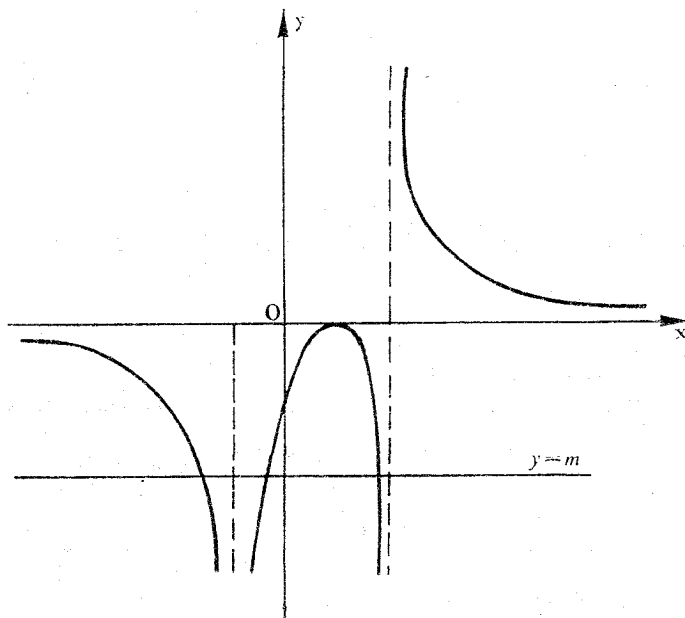
$$a = \frac{175}{27} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{5}{3} \text{ و } x_3 = -\frac{7}{3}$$

۲۶۱. معادله را می‌توان به این صورت نوشت:

$$m = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2(x-2)}$$

و بنابراین، بحث مسأله، منجر به بحث دربارهٔ تعداد و علامت طولهای نقطه‌های برخورد منحنی

$$y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2(x-2)} \quad (1)$$



شکل ۱۴۰

با خط $y = m$ می‌شود.

منحنی نمایش تغییرات تابع (۱)، در شکل ۱۴۰ داده شده است.
نتیجه بحث چنین است.

۱. $m < -\frac{1}{2}$: در این حالت، معادله مفروض درجه سوم، یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی حقیقی دارد.

۲. $m = -\frac{1}{2}$: یکی از ریشه‌های معادله، مساوی صفر و دو ریشه دیگر، یکی منفی و دیگری مثبت است.

۳. $-\frac{1}{2} < m < 0$: معادله، دو ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد.

۴. $m = 0$: معادله درجه سوم، به یک معادله درجه دوم با ریشه مضاعف مساوی ۱، تبدیل می‌شود (ریشه سوم به سمت بی‌نهایت میل می‌کند).

۵. $m > 0$: معادله تنها یک ریشه حقیقی مثبت دارد.

۲۶۲. a) طولهای نقطه‌های برخورد دوهذلولی، از معادله درجه دوم زیر بدست می‌آید:

$$(m-1)x^2 + 4x + m+1 = 0 \quad (۱)$$

و این معادله، وقتی دو ریشه حقیقی دارد که داشته باشیم: $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$ ، بنابراین به ازای $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$ ، هذلولیها دو نقطه برخورد دارند؛ به ازای $m = \pm\sqrt{5}$ ، هذلولیهای برهم‌مساندوبه ازای $m > \sqrt{5}$ یا $m < -\sqrt{5}$ ، یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

b) x' و x'' ، طولهای نقطه‌های برخورد دو منحنی (در صورت وجود)، ریشه‌های معادله (۱) هستند و بنابراین، طول نقطه P ، وسط دو نقطه برخورد، چنین می‌شود:

$$x = \frac{x' + x''}{2} = -\frac{2}{m-1} : \text{طول نقطه } P$$

از این رابطه، بدست می‌آید: $m = \frac{x-2}{x}$ ، که با توجه به شرط قسمت a (شرط وجود نقطه‌های برخورد)، باید داشته باشیم:

$$- \sqrt{5} < \frac{x-2}{x} \leq \sqrt{5} \Rightarrow \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ x \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$$

از طرف دیگر، برای عرض نقطه P داریم:

$$y = \frac{y' + y''}{2} = \frac{\frac{mx' + 2}{x' - 1} + \frac{mx'' + 2}{x'' - 1}}{2} = \frac{2mx'x'' - (m-2)(x' + x'') - 4}{2[x'x'' - (x' + x'') + 1]} = \frac{m-1}{2} \quad \text{عرض نقطه } p:$$

با حذف پارامتر m ، بین طول و عرض نقطه P، معادله مکان آن بدست می‌آید:

$$xy = -1 \quad \left(x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ یا } x \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)$$

c) $A(x', 0)$ و $B(x'', 0)$ است ریشه‌های معادله (۱) هستند. اگر $C(\alpha, 0)$ و $D(\beta, 0)$ بگیریم، برای اینکه C و D زوج توافقی یکدیگر، نسبت به A و B باشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{2}{CD} = \frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} \Rightarrow \frac{2}{\beta - \alpha} = \frac{1}{x' - \alpha} + \frac{1}{x'' - \alpha}$$

و از آنجا، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$(\alpha + \beta)(x' + x'') - 2x'x'' = 2\alpha\beta \quad (2)$$

از طرف دیگر، بین ریشه‌های معادله (۱)، رابطه زیر وجود دارد (رابطه مستقل از m):

$$(x' + x'') + 2x'x'' = 2 \quad (3)$$

برای اینکه رابطه‌های (۲) و (۳) یکی باشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{\alpha + \beta}{1} = \frac{-2}{2} = \frac{2\alpha\beta}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

و از آنجا برای α و β ، جوابهای $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ بدست می‌آید.

جواب: $D(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0)$ و $C(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}, 0)$

(d) مرکز این دستگاه انعکاس، وسط پاره خط CD ، یعنی $\omega(-\frac{1}{2}, 0)$ و

قوت انعکاس مساوی ωC^2 ، یعنی $\rho = \frac{5}{4}$ است.

(e) این دایره عبارتست از دایره به قطر CD که معادله آن چنین می‌شود:

$$x^2 + y^2 = 1 - x$$

۲۶۳. مقدار $a =$ ، در حوزۀ تعریف تابع:

$$ax^2 + (a-3)x + \frac{2}{a} - 2a$$

نیست و بنابراین در بحث ما وارد نمی‌شود.

حالت اول: $a > 0$. نامساوی $ax > a^2 - 2$ را می‌توان چنین نوشت:

$$x > \frac{a^2 - 2}{a}$$

والبتّه، مقداری از x وجود دارد که در این نامساوی و ضمناً نامساوی زیر صدق کند:

$$\varphi = ax^2 + (a-3)x + \frac{2}{a} - 2a =$$

$$= a(x - \frac{a+1}{a})(x - 2 \times \frac{1-a}{a}) > 0$$

برای این منظور، کافی است مقدار x را چنان انتخاب کنیم که از $\frac{a+1}{a}$ ، $\frac{a^2-a}{a}$

و $۲ \times \frac{1-a}{a}$ بزرگتر باشد و این به معنای آنست که همه مقادیر مثبت a ، با شرطهای مسأله نمی سازد.

حالت دوم: $a < 0$. نامساوی $۱ - a^2 > ax$ ، به این صورت درمی آید:

$$x < \frac{a^2 - 1}{a}$$

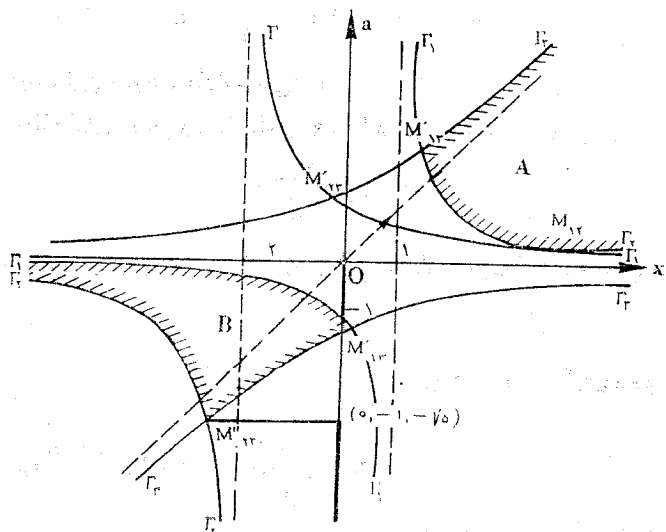
و طبق شرط مسأله، مقادیری از x ، که در نامساوی بالا صدق می کند، نباید در نامساوی زیر هم صدق کند:

$$a(x - \frac{a+1}{a})(x - 2 \times \frac{1-a}{a}) < 0$$

یا (با توجه به $a < 0$):

$$(x - \frac{a+1}{a})(x - 2 \times \frac{1-a}{a}) > 0$$

نامساوی اخیر وقتی به ازای همه مقادیر $x < \frac{a^2 - 1}{a}$ درست است که داشته



شکل ۱۴۱

باشیم:

$$\frac{a^2-2}{a} < \frac{a+1}{a}, \quad \frac{a^2-2}{a} < 2 \times \frac{1-a}{a}$$

و یا $(a < 0)$:

$$a^2-2 > a+1 \quad \text{و} \quad a^2-2 > 2-2a$$

یا:

$$\begin{cases} a^2+a-3 > 0 \\ a^2+2a-4 > 0 \end{cases}$$

که با توجه به منفی بودن a ، از حل این دستگاه بدست می‌آید:

$$a < -1 - \sqrt{5}$$

برای تعبیر هندسی مسأله، نامعادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a[a(x-1)-1][a(x+2)-2] > 0 \\ a(a-x)-2 \leq 0 \end{cases}$$

معادله $a=0$ ، معادله محور Ox است (a را عرض گرفته‌ایم). معادله‌های $a(x-1)=1$ و $a(x+2)=2$ ، معادله هذلولیهای Γ_1 و Γ_2 هستند کهمجانبه‌های اولی $a=0$ و $x=1$ و مجانبهای دومی $a=0$ و $x=-2$ و

است (شکل ۱۴).

 $a(a-x)=2$ هم، معادله یک هذلولی است (Γ_3)، که مجانبهای آن $a=x$ و $a=0$ است.هذلولیهای Γ_1 و Γ_2 در نقطه $M_{12}(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ بهم می‌رسند. هذلولیهای Γ_1 و Γ_3 ، دو نقطه برخورد دارند:

$$M'_{13}(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \quad \text{و} \quad M''_{13}(\frac{5+\sqrt{13}}{6}, \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

هذلولیهای Γ_2 و Γ_3 هم دو نقطه برخورد دارند:

$$M'_{23}(\frac{\sqrt{5}-3}{2}, \sqrt{5}-1) \quad \text{و} \quad M''_{23}(\frac{-\sqrt{5}-3}{2}, -\sqrt{5}-1)$$

برای دو منطقه A و B ، که در شکل ۱۴۱ مشخص شده است، هر دو نامساوی برقرارند. اگر $-1 - \sqrt{5} \leq a_0$ باشد، خط $a = a_0$ ، یکی از این دو منطقه را قطع می‌کند. اگر $a_0 < -1 - \sqrt{5}$ باشد، خط $a = a_0$ ، هذلولی Γ_7 را در نقطه (x_0, a_0) قطع می‌کند که به ازای $x > x_0$ در نامساوی دوم و به ازای $x < x_0$ در نامساوی اول صدق نمی‌کند.

۲۶۴. حوزه مقادیر قابل قبول: $x > 0, x \neq 1, y$ هر عدد حقیقی.

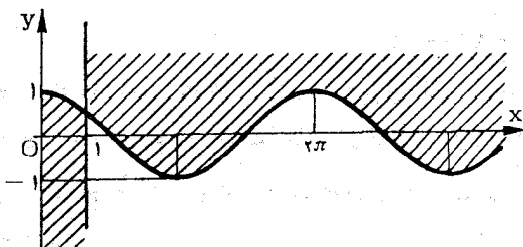
برای حل مسأله دو حالت در نظر بگیرید:

(a) $0 < x < 1$ ، در این صورت $y < \cos x$.

(b) $x > 1$ ، در این صورت $y > \cos x$.

مکان هندسی مطلوب در شکل ۱۴۲ نشان داده شده است (مرزهای این مکان،

جزو مکان نیست).



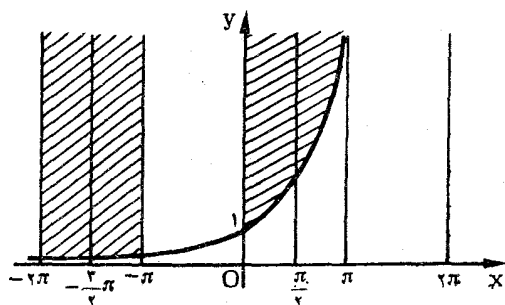
شکل ۱۴۲

۲۶۵. حوزه مقادیر قابل قبول: $x > 0, x \neq 1, y$ هر عدد حقیقی.

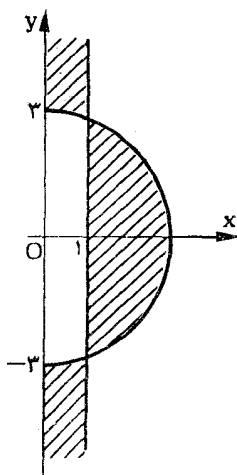
برای $0 < x < 1$ داریم: $x^2 + y^2 > 9$ و برای $x > 1$ داریم:

$x^2 + y^2 < 9$. مکان هندسی مطلوب در شکل ۱۴۳ نشان داده شده است. مرزهای

مکان، جزو مکان نیست.



شکل ۱۴۴



شکل ۱۴۳

۲۶۶. حوزه مقادیر قابل قبول: $0 < \sin x < 1$ ، $2k\pi < x < (2k+1)\pi$

۱، $\sin x \neq 1$ ، $x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، هر عدد حقیقی دلخواه؛ چون $0 < \sin x < 1$ ،

پس $y > 2^x$. مکان هندسی مورد نظر (شکل ۱۴۴)، از بی نهایت نوار صفحه محوره‌های مختصات تشکیل شده است، که از چپ به خطهای $x = 2k\pi$ ، از راست به خطهای $x = (2k+1)\pi$ و از پایین به منحنی $y = 2^x$ محدود شده‌اند.

مرزهای مکان و نقطه‌های خط $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، جزو مکان نیست.

۲۶۷. حوزه مقادیر قابل قبول:

$$\sin x > 0 \Rightarrow 2k\pi < x < (2k+1)\pi$$

$$\sin x \neq 1 \Rightarrow x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

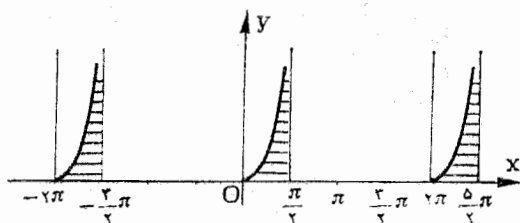
$$\tan x > 0 \Rightarrow k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ و بنابراین $y > 0$. چون

$$0 < \sin x < 1 \text{ است، پس } y < \operatorname{tg} x.$$

مکان هندسی مورد نظر، که شامل مرزهای خود نیست، در شکل ۱۴۵ داده

شده است.



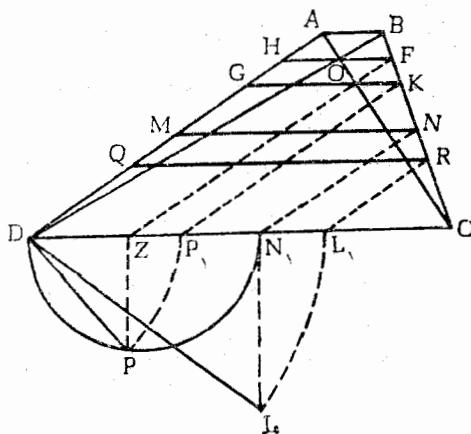
شکل ۱۴۵

۲۶۸. I. دوزنقه ABCD را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم: $AB = a$

و $DC = b$.

در این دوزنقه، چهارپاره‌خط، موازی قاعده‌ها و محدود به ساقها، در نظر

می‌گیریم (شکل ۱۴۶).



شکل ۱۴۶

(۱) طول پاره خط HF، که از محل برخورد قطرهای دوزنقه عبور می‌کند، برابر است با واسطهٔ توافقی h و a :

دو مثلث ABD و HOD، همچنین دو مثلث ABC و OFC متشابه‌اند، بنابراین داریم:

$$\frac{HO}{a} = \frac{HD}{AD}, \quad \frac{OF}{a} = \frac{FC}{BC}$$

و چون $\frac{HD}{AD} = \frac{FC}{BC}$ بدست می‌آید:

$$HO = OF = \frac{1}{2}HF$$

از تشابه دو مثلث AHO و ADC نتیجه می‌شود:

$$\frac{HF}{2b} = \frac{AD - DH}{AD} = 1 - \frac{DH}{AD}$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{HF}{2b} = 1 - \frac{HF}{2a} \Rightarrow HF = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

(۲) پاره خط GK را طوری رسم می‌کنیم که دوزنقهٔ مفروض را به دو دوزنقهٔ متشابه تبدیل کند، در اینصورت طول پاره خط GK واسطه هندسی a و b خواهد بود.

از تعریف تشابه چندضلعی‌ها، نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{GK} = \frac{GK}{b} \Rightarrow GK = \sqrt{ab}$$

(۳) خط میانهٔ دوزنقه، یعنی پاره خط MN (پاره خطی که وسط دوساق دوزنقه

را بهم وصل می‌کند)، برابر است با واسطهٔ حسابی h و a : $MN = \frac{a+b}{2}$.

(۴) طول پاره خط QR، که دوزنقه مفروض را به دو دوزنقه هم‌ارز (با

مساحت‌های مساوی)، تقسیم می‌کند؛ برابر است با واسطهٔ مربعی h و a :

اگر ضلعهای ناموازی دوزنقه، یعنی CB و DA ، را امتداد دهیم، تایکدیگر را در T قطع کنند، مثلث ATB بدست می آید که مساحت آنرا S_x می نامیم. اگر مساحت دوزنقه $ABCD$ مساوی S باشد، بنابر خاصیت دوشکل متشابه، بدست می آید:

$$\frac{S_x}{S+S_x} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow S_x = \frac{a^2 S}{b^2 - a^2}$$

و چون بنا بر فرض، QR ، دوزنقه مفروض را به دو دوزنقه متشابه تبدیل می کند و چون دو مثلث QTR و DTC متشابه اند، بدست می آید:

$$\frac{S_x + \frac{1}{2}S}{S_x + S} = \frac{QR^2}{b^2}$$

که اگر بجای S_x ، مقدارش را بر حسب a و b و S قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$QR = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

II. بسادگی معلوم می شود که GK ، نه تنها دوزنقه مفروض $ABCD$

را، بلکه دوزنقه $HFNM$ را هم به دو دوزنقه متشابه تبدیل می کند. وقتی که دو دوزنقه $MGKN$ و $GHFK$ متشابه باشند، داریم:

$$HF:GK = GK:MN$$

اما می دانیم: $HF = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ و $MN = \frac{a+b}{2}$ ، در این صورت:

$$GK = \sqrt{HF \cdot MN} = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \times \frac{a+b}{2}} = \sqrt{ab}$$

به این ترتیب، واسطه هندسی دو مقدار تغییر نمی کند، اگر بجای یکی از این دو مقدار، واسطه حسابی آنها و بجای مقدار دیگر، واسطه توافقی آنها را قرار دهیم.

از اینجا نتیجه می‌شود که می‌توان بجای نامساوی $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

نامساوی $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} + \frac{ab}{a+b}$ را قرارداد.

III. ثابت می‌کنیم که پاره‌خطهای QR, MN, GK, HF دایمی‌توان

روی یک‌شکل رسم نمود.

روی قاعدهٔ بزرگتر $DC = b$ ، به اندازهٔ $DN_1 = MN = \frac{a+b}{2}$

جدا می‌کنیم، در اینصورت $N_1C = \frac{b-a}{2}$ می‌شود، N_1L را عمود بر DC

و مساوی N_1C رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DN_1L ، برای وتر DL داریم:

$$DL = \sqrt{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

به قطر DN_1 ، نیم‌دایره‌ای رسم می‌کنیم و سپس وتر $N_1D = N_1L = \frac{b-a}{2}$

را جدا می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DN_1P برای ضلع DP داریم:

$$DP = \sqrt{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$$

DZ ، تصویر $DP = \sqrt{ab}$ را روی وتر $DN_1 = \frac{a+b}{2}$ بدست می‌آوریم،

داریم:

$$DP^2 = DN_1 \cdot DZ \Rightarrow DZ = \frac{DP^2}{DN_1} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

به این ترتیب: $DZ = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ ، ضلع مجاور به زاویه قائمه و $DP = \sqrt{ab}$ ،

وتر مثلث DZP هستند؛ همچنین $DP = \sqrt{ab}$ ، ضلع مجاور به زاویه قائمه و

$DN_1 = \frac{a+b}{2}$ وتر مثلث DN_1P هستند؛ و بالاخره $DN_1 = \frac{a+b}{2}$ ، ضلع

مجاور به زاویه قائمه و $DL = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ ، وتر مثلث DN_1L هستند

و از آنجا:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

درستی نامساویهارا، از روی جای نقطه های L, N_1, P, Z روی پاره خط DC

هم می توان دید. این واسطه ها، در حالت $a = b$ ، با هم برابر می شوند، در این

حالت دوزنقه $ABCD$ به متوازی الاضلاع تبدیل می شود و پاره خطهای HF ،

QR, MN, GK بر هم منطبق و تبدیل به پاره خطی می شوند که از محل برخورد

قطرهای متوازی الاضلاع گذشته است و در این صورت طول هر یک از آنها مساوی

$a = b$ می شود.

۲۶۹. توضیح ۱. هر معادله کامل درجه چهارم به صورت:

$$mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0$$

با تبدیل $x = X - \frac{n}{4m}$ به معادله درجه چهارمی به صورت:

$$mX^4 + PX^3 + QX^2 + R = 0$$

که فاقد جمله درجه سوم است، تبدیل می شود و از تقسیم دو طرف معادله اخیر به m

به معادله زیر می رسیم:

$$X^4 + aX^3 + bX^2 + c = 0$$

بنابراین بحث در تعداد ریشه‌های حقیقی این معادله، بمنزله بحث در تعداد ریشه های حقیقی يك معادله کامل درجه چهارم است.

توضیح ۰۲. می‌دانیم که معادله درجه سوم $x^3 + px + q = 0$ در حالت $4p^3 + 27q^2 > 0$ ، تنها يك ریشه حقیقی و در حالت $4p^3 + 27q^2 < 0$ ، سه ریشه حقیقی و در حالت $4p^3 + 27q^2 = 0$ ، يك ریشه ساده و يك ریشه مضاعف حقیقی دارد. عبارت $4p^3 + 27q^2$ را برای سهولت کار، می‌توان چنین نوشت:

$$4p^3 + 27q^2 = 4 \times 27 \left[\left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{3} \right)^2 \right]$$

و بنابراین برای بحث در تعداد ریشه‌های حقیقی معادله درجه سوم به صورت: $x^3 + px + q = 0$ ، می‌توان علامت عبارت $\left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{3} \right)^2$ را جستجو کرد. حالا به بررسی تعداد ریشه‌های حقیقی، در معادله مفروض درجه چهارم می‌پردازیم:

قضیه ۰۱. اگر $\left(\frac{a}{6} \right)^3 + \left(\frac{b}{8} \right)^2 > 0$ باشد، معادله مفروض یا ریشه حقیقی

ندارد و یادارای دوریشه حقیقی است (مختلف یا مساوی).

اثبات. اگر معادله مفروض را به صورت $x^4 + ax^2 + bx = -c$

بنویسیم، باید درباره تعداد نقطه‌های برخورد منحنی:

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx$$

و خط $y = -c$ بحث کنیم. متذکر می‌شویم که شرط $f'(x) \geq 0$ را می‌توان به

صورت نامعادله $x^3 + \frac{a}{2}x + \frac{b}{4} \geq 0$ نوشت. به این ترتیب در حالتی که

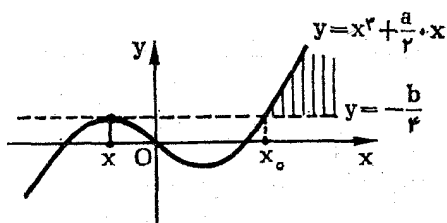
$\left(\frac{a}{6} \right)^3 + \left(\frac{b}{8} \right)^2 > 0$ باشد، معادله $f'(x) = 0$ تنها يك ریشه حقیقی دارد

$(x = x_0)$ ، در این صورت اگر $x \geq x_0$ باشد، $f'(x) \geq 0$ و اگر $x < x_0$

باشد، $f'(x) < 0$ می‌شود. این بحث برای حالت $\left(\frac{a}{6} \right)^3 + \left(\frac{b}{8} \right)^2 = 0$ هم

درست است، در این حالت نقطه‌ای مانند $x = \alpha < x_0$ وجود دارد که برای آن

$x^3 + \frac{a}{2}x = -\frac{b}{4}$ است، ولی وجود این نقطه، هیچ‌تغییری در نتیجه‌ای که

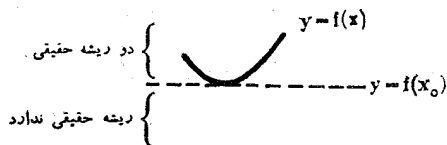


شکل ۱۴۷

ما گرفتیم، نمی‌دهد (شکل ۱۴۷).

به این ترتیب، نقطه $x = x_0$ ، نقطه می‌نیم تابع $f(x)$ است و بنابراین به ازای $f(x_0) > -c$ ، معادله مفروض درجه چهارم، ریشه حقیقی ندارد و به

ازای $f(x_0) < -c$ دارای دو ریشه حقیقی است. ضمناً در حالت $f(x_0) = -c$ این دو



ریشه حقیقی باهم برابرند (شکل ۱۴۸).

قضیه ۴. اگر $(\frac{a}{r})^2 + (\frac{b}{\lambda})^2 < 0$ باشد، معادله مفروض درجه چهارم یا

ریشه حقیقی ندارد، یا دوریشه حقیقی دارد و یا چهار ریشه حقیقی.

اثبات. بنابراین فرض این حالت، معادله $x^2 + \frac{a}{r}x = -\frac{b}{r}$ دارای سه

ریشه حقیقی است:

$$x_1 < x_2 < x_3$$

بنابراین رابطه:

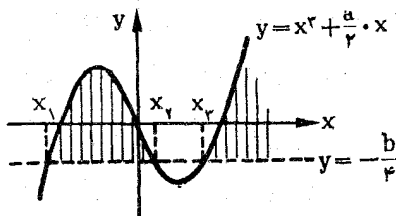
$$x^2 + \frac{a}{r}x > -\frac{b}{r}$$

وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$x > x_3 \text{ و یا } x_1 < x < x_2$$

در حالت $x < x_1$ و یا

$$x_2 < x < x_3 \text{ داریم:}$$

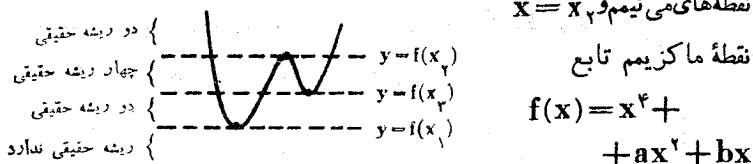


شکل ۱۴۹

شده است).
 $y = -\frac{b}{4}x^2 + \frac{a}{2}x < -\frac{b}{4}$ (در شکل ۱۴۹ خط $y = -\frac{b}{4}$ برای $b > 0$ نشان داده شده است).

به این ترتیب به ازای $x_1 < x < x_2$ یا $x > x_2$ داریم: $f'(x) > 0$ و به ازای $x < x_1$ و یا $x_2 < x < x_3$ داریم: $f'(x) < 0$. یعنی $x = x_3$ و $x = x_1$

نقطه‌های می‌نیم و $x = x_2$



شکل ۱۵۰

است. طرح کلی نمایش

تغییرات تابع $f(x)$ در شکل ۱۵۰ نشان داده شده است، که در آن برای مشخص بودن وضع $f(x_1) < f(x_2)$ گرفته شده است.

۲۷۰. منحنی تابع مفروض به ازای همهٔ مقادیر a ، از نقطهٔ ثابت $A(-1, 1)$ می‌گذرد.

خط دلخواهی با ضریب زاویهٔ m از A می‌گذرانیم:

$$y = mx + m + 1$$

این خط منحنی تابع مفروض را در نقطهٔ دیگری (غیر از A) قطع می‌کند، که آن را B می‌نامیم. مختصات B بسادگی بدست می‌آید:

$$B\left(\frac{m-a+2}{a+1}, \frac{m^2+2m+a+1}{a+1}\right)$$

و اگر ضریب زاویهٔ مماس در نقطهٔ B بر منحنی تابع مفروض را پیدا کنیم (طول نقطهٔ B را بجای x ، در مشتق تابع قرار می‌دهیم)، مقدار $2m+3$ بدست می‌آید. می‌بینیم که این ضریب زاویه به مقدار پارامتر a بستگی ندارد، یعنی اگر منحنی را به ازای مقادیر مختلف پارامتر a ، در نظر بگیریم و نقطه‌های نظیر B_1, B_2, B_3 و غیره را روی آنها پیدا کنیم، مماس در این نقطه‌ها، با هم موازی می‌شود و بنابراین

منحنی‌های نظیر این پارامتر، نسبت به مرکز A ، مجانس یکدیگرند.

چون به ازای $a > -1$ ، منحنی‌های تابع مفروض دارای می‌نیم و به ازای $a < -1$ دارای ماکزیمم اند؛ اگر دو مقداری که به پارامتر a نسبت می‌دهیم، هر دو بزرگتر از -1 یا هر دو کوچکتر از -1 باشند، دو منحنی نظیر آنها مجانس مستقیم اند و در حالتی که دو مقدار یکی کوچکتر و دیگری بزرگتر از -1 به a نسبت دهیم، دو منحنی نظیر، مجانس معکوس یکدیگر می‌شوند.

۰۲۷۱. مختصات نقطه‌های ثابت چنین است:

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 2(6-t) \end{vmatrix} ; B \begin{vmatrix} 4 \\ 4(6-t) \end{vmatrix}$$

ضریب زاویه خط AB مساوی $6-t$ و بنا بر این ضریب زاویه خط عمود منصف

آن $\frac{1}{6-t}$ می‌شود. مختصات وسط پاره خط AB :

$$M(3, 3(6-t))$$

از اینجا، معادله عمود منصف پاره خط AB بسادگی بدست می‌آید:

$$x + (6-t)y - 3[(6-t)^2 + 1] = 0$$

که اگر برای سهولت کار $6-t = \alpha$ بگیریم:

$$x + \alpha y - 3(\alpha^2 + 1) = 0$$

$$3\alpha^2 - \alpha y - x + 3 = 0$$

و یا:

برای اینکه پوش این خط را بدست آوریم، باید شرط وجود ریشه مضاعف را، نسبت

به مجهول α بنویسیم:

$$y^2 - 12(3-x) = 0$$

$$x = -\frac{1}{12}y^2 + 3 \quad \text{و یا:}$$

و این معادله يك سهمی است که محوری موازی محور طول دارد و بر عمود منصف

پاره خط AB ، به ازای همه مقادیر t مماس است.

۲۷۲. I. حل نموداری معادله درجه دوم:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

روش اول. منحنی سهمی $y = x^2 + px + q$ را رسم می‌کنیم. طولهای نقطه‌های برخورد این منحنی با محور طول، جوابهای معادله (۱) خواهد بود. معادله (۱) وقتی ریشه‌های حقیقی ندارد، که این سهمی، محور طول را قطع نکند. **روش دوم.** بجای معادله (۱) دستگاه دو معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y = x^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + px + q = 0 & (3) \end{cases}$$

طولهای نقطه‌های برخورد سهمی (۲) با خط (۳)، جوابهای معادله (۱) است. ولی چون رسم دقیق سهمی بسادگی میسر نیست، بهتر است بجای روشهای اول و دوم، به روشهایی متوسل شویم، که بجای سهمی، از دایره استفاده شود. چون دایره را می‌توان به سهولت و به کمک یک پرگار رسم کرد.

روش سوم. بجای معادله (۱)، دستگاه دو معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + px + q = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

طولهای نقطه‌های برخورد دایره با محور طول، جوابهای معادله (۱) است.

مرکز این دایره $Q(-\frac{p}{2}, 0)$ و شعاع آن مساوی $\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$ می‌باشد.

روش چهارم. بجای معادله (۱)، این دستگاه را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + px + sy + q = 0 & (4) \\ y = 0 \end{cases}$$

که در آن مقدار s را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد. معادله (۴)، معرف دایره‌ای است به مرکز $Q(-\frac{p}{2}, -\frac{s}{2})$. بهتر است مقدار s را چنان اختیار

وازنقطه‌های K_1 و K_2 (اگر وجود داشته باشند)، محل برخورد CD با دایره Γ

نامبرده، خطهای OK_1 و OK_2 را رسم می‌کنیم تا خط $y=2$ را در نقطه‌های M_1 و M_2 قطع کنند. طولهای نقطه‌های M_1 و M_2 ، جوابهای معادله (۱) هستند. استدلال را به‌عهده خواننده می‌گذاریم.

II. حل نموداری معادله درجه سوم

$$x^3 + px + q = 0 \quad (5)$$

میدانیم که هر معادله درجه سوم را می‌توان بسادگی به صورت معادله (5) در آورد. p و q مقادیری ثابت و $q \neq 0$ فرض شده است.

روش اول. منحنی تابع $y = x^3 + px + q$ را رسم می‌کنیم، طولهای نقطه‌های برخورد این منحنی با محور Ox ، جوابهای معادله (5) هستند. البته روشن است که برای رسم این منحنی، باید مقداری وقت صرف کرد.

روش دوم. برای حل معادله (5)، دستگاه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y + px + q = 0 \end{cases}$$

طولهای نقطه‌های تلاقی سهمی درجه سوم $y = x^3$ و خط $y + px + q = 0$ ، ریشه‌های معادله (5) خواهد بود.

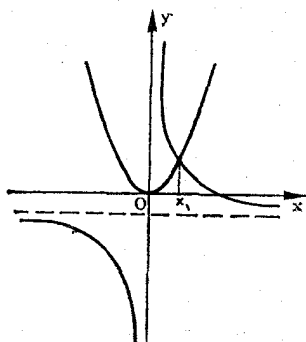
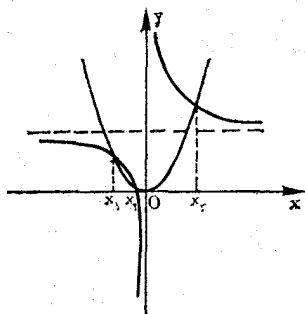
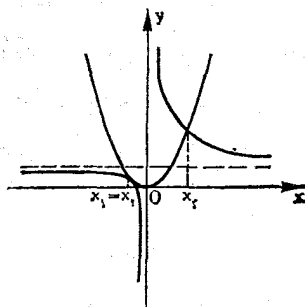
حسن این روش در اینجاست که تابع $y = x^3$ برای حل هر معادله درجه سومی ثابت است و تنها خط $y + px + q = 0$ تغییر می‌کند.

روش سوم. بجای منحنی درجه سوم $y = x^3$ ، می‌توان از سهمی $y = x^2$ استفاده کرد. برای این منظور، از دستگاه زیر، برای حل معادله (5) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ xy + px + q = 0 \end{cases}$$

معادله دوم این دستگاه، يك هذلولی است به معادله:

$$x(y+p) = -q$$



شکل ۱۵۳

بامجانبهای $y = -p$ و $x = 0$ و مرکز $\omega(0, -p)$ سهمی و هذلولی نامبرده. ممکن در یک نقطه و یا سه نقطه یکدیگر را قطع کنند (بسته به اینکه معادله (۵) یک یا سه ریشه حقیقی داشته باشد). در حالت خاص: ممکن است هذلولی و سهمی در یک نقطه برهم مماس باشند، که در این صورت، معادله (۵) یک

ریشه مضاعف و یک ریشه ساده دارد (شکل ۱۵۳).

روش چهارم. می توان دستگاهی که بجای معادله (۵) انتخاب می کنیم، طوری گرفت که مجانبهای هذلولی، محورهای مختصات باشد:

$$\begin{cases} y = x^2 + p \\ xy + q = 0 \end{cases}$$

در حالت کلی معادله درجه سوم، یعنی وقتی که به صورت:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (۶)$$

باشد، می توان، بدون تغییر معادله، از دستگاه زیر استفاده کرد:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ xy + ay + bx + c = 0 \end{cases}$$

معادلهٔ دوم این دستگاه با شرط $ab - c \neq 0$ ، هذلولی است به این صورت:

$$(x+a)(y+b) = ab - c$$

که مرکز آن $\omega(-a, -b)$ و مجانبهای آن $x = -a$ و $y = -b$ است.

III. حل نموداری معادلهٔ درجه چهارم:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (7)$$

(هر معادلهٔ درجه چهارم را می‌توان به معادلهٔ درجه چهارمی تبدیل کرد که شامل

جمله درجه سوم نباشد - به توضیح ۱ در حل مسئلهٔ ۲۶۹، صفحهٔ ۳۲۸ مراجعه کنید).

برای حل معادلهٔ (۷) ازدستگاه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 + ay + bx + c = 0 \end{cases}$$

معادلهٔ دوم این دستگاه یک سهمی است که محوری موازی محور طول دارد. طولهای نقطه‌های برخورد این دوسهمی، ریشه‌های معادلهٔ (۷) خواهند بود.

می‌توان سهمی دوم را به این ترتیب به دایره تبدیل کرد: به سمت چپ این

معادله، x^2 اضافه می‌کنیم و سپس y را (که مساوی x^2 است) از آن کم می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 + (a-1)y + bx + c = 0, \quad ,$$

$$(x + \frac{b}{2})^2 + (y + \frac{a-1}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 + (\frac{a-1}{2})^2 - c \quad (8)$$

در حالتی که $(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a-1}{2})^2 - c > 0$ باشد، معادلهٔ (۸) نمایندهٔ دایره‌ای

است به مرکز $Q(-\frac{b}{2}, \frac{1-a}{2})$ و شعاع $\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a-1}{2})^2 - c}$

طولهای نقطه‌های برخورد سهمی $y = x^2$ با این دایره، ریشه‌های معادله (۷) هستند.

در حالت $(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a-1}{2})^2 - c = 0$ ، معادله (۸) به نقطه

$Q(-\frac{b}{2}, \frac{1-a}{2})$ تبدیل می‌شود. اگر سهمی $y = x^2$ از این نقطه عبور

کند، بدست می‌آید $(\frac{b}{2})^2 = \frac{1-a}{2}$ ، که از آنجا بدست می‌آید:

$$a = 1 - \frac{b^2}{2}, c = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{16}$$

و معادله درجه چهارم (۷) به اینصورت درمی‌آید:

$$x^4 + (1 - \frac{b^2}{2})x^2 + bx + \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{16} = 0$$

و $x = -\frac{b}{2}$ ریشه مضاعف این معادله است.

در حالت $(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a-1}{2})^2 - c < 0$ دایره (۸) يك دایرهٔ موهومی

است و بنابراین معادله (۷) هم ریشهٔ حقیقی ندارد.

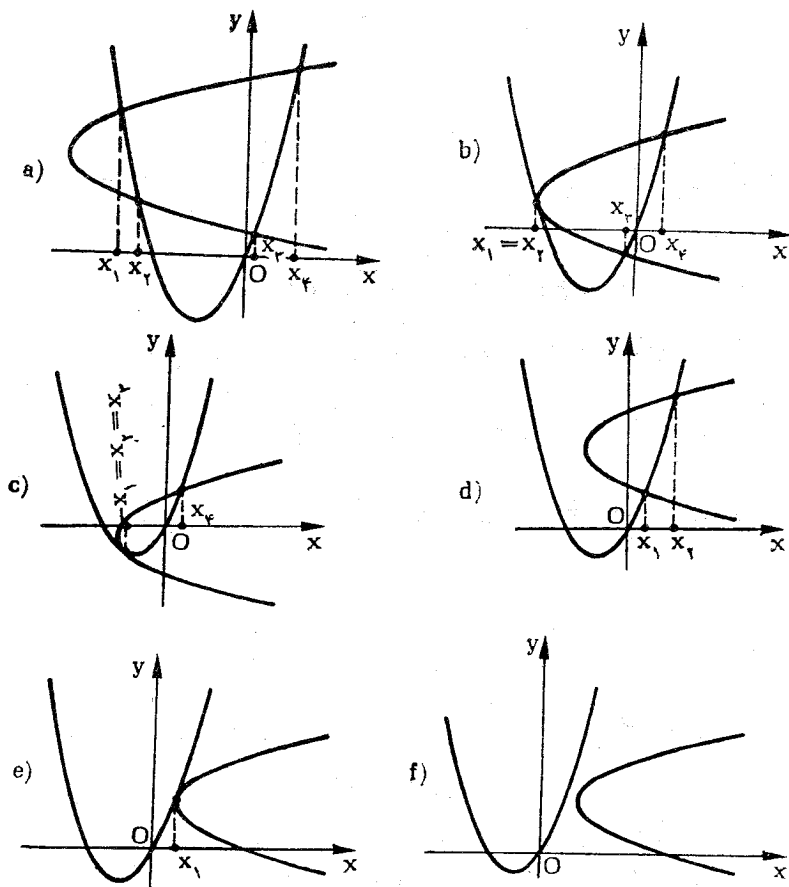
برای معادله درجه چهارم کلی، یعنی معادله به صورت:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (9)$$

می‌توان با تبدیل $(\alpha \neq 0)\alpha y = x^3 + \frac{a}{\alpha}x$ ، عمل نمود. در اینصورت، ریشه

های معادله (۹)، طولهای نقطه‌های تلاقی دوسهمی زیر خواهند بود.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\alpha}x^3 + \frac{a}{2\alpha}x \\ x = \frac{\frac{\alpha^2}{ab - \frac{a^2}{2} - c}}{\frac{ab}{2} - \frac{a^2}{8} - c}y^3 + \frac{a(b - \frac{a^2}{4})}{\frac{ab}{2} - \frac{a^2}{8} - c}y + d \end{cases}$$



شکل ۱۵۴

α را می‌توان طوری انتخاب کرد، که دو سهمی (که یکی محوری موازی محور عرض و دیگری محوری موازی محور طول دارد)، مساوی باشند، در اینصورت باید داشته باشیم :

$$\alpha^2 = \frac{ab}{\gamma} - \frac{a^2}{\lambda} - c$$

حالت‌های مختلف وضع این دوسهمی را، می‌توان در شکل ۱۵۴ دید.

در حالت $\alpha = 0$ ، سهمی $\alpha y = x^2 + \frac{a}{p}x$ به دو خط موازی محور عرض

تبدیل می شود و ما بررسی آنرا به عهده خواننده می گذاریم.

مقادیر حد اکثر و حداقل

۲۷۳. با استفاده از نامساویهای $|\sin \alpha| \leq 1$ و $a^2 + b^2 \geq 2ab$ بدست

می آید:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x + (1 + \tan^2 x)^2 + \\ (1 + \cot^2 x)^2 &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x + 2 + 2(\tan^2 x + \cot^2 x) + (\tan^2 x + \\ + \cot^2 x) &\geq 3 - \frac{1}{2} + 4 + 2 = \frac{17}{2} \Rightarrow f(x) \geq \frac{17}{2} \end{aligned}$$

به این ترتیب تابع $f(x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ ، برابر با حداقل مقدار خود، یعنی

$\frac{17}{2}$ می شود.

۲۷۴. اگر مرکز بیضی را منطبق بر مبدأ مختصات و قطر بزرگتر آنرا

منطبق بر محور xx' فرض کنیم، معادله اش به صورت $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ خواهد بود،

که در آن b و a نیم قطره های بزرگتر و کوچکتر بیضی هستند.

مستطیلی که در بیضی محاط شود، محورهای منطبق بر محورهای بیضی

خواهد داشت و بنابراین اگر $M(x, y)$ را رأسی از مستطیل که در ربع اول

است در نظر بگیریم، $x \cdot y$ برابر با ربع مساحت مستطیل است. به این ترتیب

ماکزیم مساحت مستطیل همراه با $x \cdot y$ یا ماکزیم عبارت:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \text{ ولی چون مجموع } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ مقداری ثابت و طبق}$$

فرض مساوی واجداست، ماکزیم حاصلضرب آنها وقتی بدست می آید که

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \text{ باشد و از آنجا بدست می آید:}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

که در نتیجه مقادیر a و b بدست می‌آید: $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ و $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$ و مساحت

مستطیل مطلوب: $S = 2ab$ می‌شود.

۰۲۷۵. اگر شبیه مسأله قبل استدلال کنیم، ابعاد مکعب مستطیل به حجم

ماکزیمم چنین می‌شود:

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} ; y = \frac{b}{\sqrt{3}} ; z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

و حجم ماکزیمم: $V = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$ خواهد شد.

۰۲۷۶. تابع مفروض را به این ترتیب تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{5 \circ f(x)} = \sqrt[3]{\frac{5x^2+5}{3x^2+4} \cdot \frac{5x^2+5}{3x^2+4} \cdot \frac{2x^2+6}{3x^2+4}}$$

باتوجه به اینکه هر یک از عملهای زیر رادیکال مقادیری مثبت هستند، اگر از

نامساوی واسطه‌ها استفاده کنیم $(\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \leq \frac{a+b+c}{3})$ بدست می‌آید:

$$\sqrt[3]{5 \circ f(x)} \leq \frac{12x^2+16}{3(3x^2+4)} = \frac{4}{3}$$

علامت تساوی وقتی صحیح است، که داشته باشیم:

$$5x^2+5 = 2x^2+6 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

بنابراین به ازای $x^2 = \frac{1}{3}$ حداکثر $f(x)$ برابر با $\frac{4}{3\sqrt[3]{5}}$ بدست می‌آید.

۰۲۷۷. ابتدا به اثبات نامساوی زیر می‌پردازیم:

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a'^2+b'^2} > \sqrt{(a+a')^2 + (b+b')^2} \quad (۱)$$

چون هر دو طرف نامساوی مثبت است، می توان دو طرف آنرا مجذور کرد، که پس از ساده کردن، به صورت زیر درمی آید:

$$\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)} > aa' + bb'$$

اگره $aa' + bb' < 0$ باشد، نامساوی واضح است و در حالتی که داشته باشیم: $aa' + bb' > 0$ ، می توان دوباره دو طرف آنرا مجذور کرد که پس از ساده کردن به نامساوی واضح زیر تبدیل می شود:

$$(ab' - ba')^2 > 0$$

تذکر. می توان باروش استقراء ریاضی، نامساوی (۱) را در حالت کلی زیر ثابت کرد:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2+b^2+\dots+l^2} + \sqrt{a'^2+b'^2+\dots+l'^2} > \\ & \sqrt{(a+a')^2 + (b+b')^2 + \dots + (l+l')^2} \end{aligned}$$

حالا برای حداقل تابع مفروض با استفاده از نامسای (۱) می نویسیم:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 + (\sqrt{a})^2} + \sqrt{(c-x)^2 + (\sqrt{b})^2} > \\ & > \sqrt{(x+c-x)^2 + (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \end{aligned}$$

$$y > \sqrt{c^2 + (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \quad \text{و به این ترتیب:}$$

$$y_{\text{Min}} = \sqrt{c^2 + (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \quad \text{یعنی داریم:}$$

(۲۷۸. a) با توجه به نامساوی:

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a'^2+b'^2} > \sqrt{(a+a')^2 + (b+b')^2}$$

می توان نوشت:

$$y = \sqrt{x^2 - 2mx + n^2} + \sqrt{x^2 - 2px + q^2} =$$

$$= \sqrt{(x-m)^2 + (n^2 - m^2)} + \sqrt{(p-x)^2 + (q^2 - p^2)} > \\ > \sqrt{(x-m+p-x)^2 + (\sqrt{n^2 - m^2} + \sqrt{q^2 - p^2})^2}$$

و بنابراین:

$$y_{\text{Min}} = \sqrt{(p-m)^2 + (\sqrt{n^2 - m^2} + \sqrt{q^2 - p^2})^2}$$

و این مقدار می نیمم به ازای مقداری از x است که از معادله زیر بدست می آید:

$$\frac{x-m}{p-x} = \frac{\sqrt{n^2 - m^2}}{\sqrt{q^2 - p^2}}$$

(b) برای پیدا کردن ماکزیمم تابع دوم، از نامساوی زیر استفاده می کنیم:

$$\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a'^2 + b'^2} \leq \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}$$

که در این صورت خواهیم داشت:

$$y = \sqrt{x^2 + 2mx + n^2} - \sqrt{x^2 - 2px + q^2} = \\ = \sqrt{(x+m)^2 + (n^2 - m^2)} - \sqrt{(x-p)^2 + (q^2 - p^2)} < \\ < \sqrt{(x+m+p-x)^2 + (\sqrt{n^2 - m^2} - \sqrt{q^2 - p^2})^2}$$

$$y_{\text{Max}} = \sqrt{(m+p)^2 + (\sqrt{n^2 - m^2} - \sqrt{q^2 - p^2})^2}$$

و این مقدار ماکزیمم به ازای مقداری از x است که از معادله زیر بدست می آید:

$$\frac{x+m}{x-p} = \frac{\sqrt{n^2 - m^2}}{\sqrt{q^2 - p^2}}$$

در هر دو حالت تنها با فرض $|m| < |n|$ و $|p| < |q|$ نیز می توان به نتیجه رسید.

۲۷۹. می‌توان نوشت:

$$y^2 = [\sqrt{(x+2)(6-x)} - \sqrt{(x+1)(3-x)}]^2 = \\ = [\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{(x+2)(3-x)}]^2 + 3 \geq 3$$

و بنابراین $|y| \geq \sqrt{3}$.

به سادگی می‌توان ثابت کرد که به ازای مقادیر قابل قبول x (که به ازای

آنها مقادیر رادیکالها حقیقی باشند)، داریم:

$$-x^2 + 4x + 12 > -x^2 + 2x + 3$$

و بنابراین $y > \sqrt{3}$ و $y = y > 0$ می‌شود.

علامت تساوی تنها برای حالت:

$$\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{(x+2)(3-x)} = 0$$

وجود دارد که جواب $x = 0$ را می‌دهد.

جواب: به ازای $x = 0$ ، $y = \sqrt{3}$ حداقل مقدار تابع است.

۲۸۰. راه حل اول. داریم:

$$A = \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) = 1 + \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}\right) + \frac{2}{\sin 2\alpha} >$$

$$> 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow A_{\min} = 3 + 2\sqrt{2}$$

راه حل دوم. تبدیلهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$A = \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) = 1 + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}{\sin \alpha \cos \alpha} =$$

$$= 1 + \frac{2}{\sin 2\alpha} \left(1 + \sqrt{1 + \sin 2\alpha}\right) = 1 + \frac{2}{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} - 1} >$$

$$> 1 + \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = 1 + 2(\sqrt{2} + 1) = 3 + 2\sqrt{2}$$

حالت تساوی به ازای $\alpha = 45^\circ$ بدست می‌آید.

$$y = \frac{3}{ax^2 + \frac{c}{x^2} + b} \quad \text{۲۸۱. داریم:}$$

و چون حاصلضرب $ax^2 \times \frac{c}{x^2}$ مقدار یست ثابت. مجموع $ax^2 + \frac{c}{x^2}$

وقتی می‌نیم است که $ax^2 = \frac{c}{x^2}$ باشد، از آنجا $x = \pm \sqrt[4]{\frac{c}{a}}$ بدست می‌آید

و ضمناً:

$$y_{\text{Max}} = \frac{3}{b + 2\sqrt{ac}}$$

۲۸۲. ثابت می‌کنیم که وقتی $x > 0$ باشد، $x + \frac{1}{x} \geq 2$ است، در حقیقت

داریم:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

حالا می‌نویسیم:

$$ab + cd = ab + \frac{1}{ab} \geq 2 \quad (۱)$$

$$ac + bd = ac + \frac{1}{ac} \geq 2 \quad (۲)$$

$$ad + bc = ad + \frac{1}{ad} \geq 2 \quad (۳)$$

علاوه بر آن داریم:

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab \geq 2ab$$

$$c^2 + d^2 = (c-d)^2 + 2cd \geq 2cd$$

از جمع دو نامساوی اخیر بدست می‌آید:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2ab + 2cd = 2\left(ab + \frac{1}{ab}\right) \geq 4 \quad (۴)$$

با جمع نامساویهای (۱)، (۲)، (۳) و (۴) بدست می‌آید:

$$\Sigma ab + \Sigma a^2 \geq 10$$

بنابراین، حداقل عبارت مساوی ۱۰ می‌باشد که به ازای $a = b = c = d = 1$ بدست می‌آید

۰۲۸۳ چون $\cos^2 x \leq 1$ است، داریم:

$$\cos^2 x - 4\cos x + 5 \leq 6 - 4\cos x$$

و چون $3 - 2\cos x > 0$ است، بدست می‌آید:

$$\frac{\cos^2 x - 4\cos x + 5}{3 - 2\cos x} \leq 2$$

و واضح است که حالت تساوی برای $\cos x = \pm 1$ بدست می‌آید، بنابراین حداکثر تابع مساوی ۲ می‌باشد.

حالا تابع را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 x - 4\cos x + 5}{3 - 2\cos x} &= \frac{(3 - 2\cos x)^2 + 5 + (6 - 4\cos x)}{4(3 - 2\cos x)} = \\ &= \frac{3 - 2\cos x}{4} + \frac{5}{4(3 - 2\cos x)} + \frac{1}{2} > \\ &> 2 \sqrt{\frac{3 - 2\cos x}{4} \cdot \frac{5}{4(3 - 2\cos x)}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \end{aligned}$$

حالت تساوی تنها وقتی وجود دارد که داشته باشیم:

$$\frac{3 - 2\cos x}{4} = \frac{5}{4(3 - 2\cos x)}$$

که از آن بدست می‌آید: $\cos x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ حداکثر مقدار تابع مساوی

و $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1)$ می‌شود.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1) \leq y \leq 2$$

۲۸۴ داریم:

$$\begin{aligned} y &= (\sin x + a)(\cos x + a) = \sin x \cos x + a(\sin x + \cos x) + a^2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{2} \sin x \cos x + 1 + \sqrt{2}a(\sin x + \cos x) + \sqrt{2}a^2 - 1] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{2} \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x + \sqrt{2}a(\sin x + \cos x) + a^2 + \\ &+ (a^2 - 1)] = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sin x + \cos x + a)^2 + (a^2 - 1)]; \quad (1) \end{aligned}$$

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2} \quad \text{و چون داریم:}$$

طبق رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y_{\text{Max}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(a + \sqrt{2})^2 + a^2 - 1] = (a + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 \\ x &= 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (2) \end{aligned}$$

وقتی $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ باشد، حداقل مقدار y به ازای $\sin x + \cos x + a = 0$ بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} y_{\text{Min}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a^2 - 1) \\ x &= 2k\pi + \frac{\pi}{4} \pm (\pi - \arccos \frac{a}{\sqrt{2}}) \quad (3) \end{aligned}$$

وقتی $\sin \alpha + \cos x = -\sqrt{2}a > \sqrt{2}$ باشد:

$$\begin{aligned} y_{\text{Min}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(a - \sqrt{2})^2 + a^2 - 1] = (a - \frac{\sqrt{2}}{2})^2; \\ x &= (2k + 5)\frac{\pi}{4} \quad (4) \end{aligned}$$

طبق عبارتهای ۲ تا ۴ می‌توان نتیجه گرفت که حداکثر و حداقل تابع y ، با زیاد

شدن a زیاد می شود.

به ازای $a=0$ ، طبق رابطه (۳)، می نیمم مطلق تابع مفروض، مساوی

$$y_{\text{Min}} = -\frac{1}{2} \text{ می شود.}$$

۲۸۵. تابع مفروض را به صورت زیر می نویسیم:

$$y = a^2 \frac{1-x}{x} + b^2 \frac{x}{1-x} + a^2 + b^2$$

حاصل ضرب مقادیر مثبت $a^2 \frac{1-x}{x}$ و $b^2 \frac{x}{1-x}$ (باتوجه به شرط $0 < x < 1$)

مقدار یست ثابت، بنابراین می نیمم مجموع آنها وقتی بدست می آید، که داشته باشیم:

$$a^2 \frac{1-x}{x} = b^2 \frac{x}{1-x} \Rightarrow x = \frac{a}{a+b}$$

$$\text{جواب: } y_{\text{Min}} = (a+b)^2 \text{ به ازای } x = \frac{a}{a+b}$$

۲۸۶. طبق فرض مسأله، باید حداقل نسبت زیر را بدست آوریم:

$$\lambda = \frac{100x + 10y + z}{x + y + z}$$

که در آن x, y, z و z و y و x عددهایی صحیح و $1 \leq x \leq 9$ ، $0 \leq y \leq 9$ و $0 \leq z \leq 9$ می باشد. از آنجا:

$$\lambda = 1 + 9 \times \frac{11x + y}{x + y + z}$$

واضح است که باید $z=9$ باشد و سپس:

$$\lambda = 1 + 9 \times \frac{11x + y}{9 + x + y} = 1 + 9 \left(1 + \frac{10x - 9}{9 + x + y} \right)$$

از اینجا روشن است که $y=9$ می شود و داریم:

$$\lambda = 10 + 9 \times \frac{10x - 9}{x + 18} = 100 - \frac{1701}{x + 18}$$

و حداقل λ وقتی است که $x = 1$ باشد.

جواب: $\lambda_{\text{Min}} = 10 \frac{9}{19}$ برای عدد ۱۹۹.

۲۸۷. عبارت مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$A = (x + y + 1)^2 + (y + 1)^2 + 1$$

و واضح است که حداقل عبارت وقتی بدست می‌آید که داشته باشیم:

$$x + y + 1 = 0 ; y + 1 = 0$$

و از آنجا $x = 0$ و $y = -1$ و $A = 1$ می‌شود.

۲۸۸. تابع z را چنین می‌نویسیم:

$$z = \frac{2(a^2 - xy) - (x - y)^2}{a^2 - xy} = 2 - \frac{(x - y)^2}{a^2 - xy}$$

و z وقتی می‌نیم است که $\frac{(x - y)^2}{a^2 - xy}$ ماکزیم باشد که با توجه به شرایط x و y

در حالت $x = 0, y = a$ یا $y = 0, x = a$ بدست می‌آید و در این صورت:

$$z_{\text{Min}} = 1$$

۲۸۹. می‌توان نوشت:

$$2^n + 3^n = 2^n + (-1)^n(2 - 5)^n = 2^n + (-1)^n \times 2^n -$$

$$- (-1)^n \times 2^{n-1} \times 5 + (-1)^n \times 2^{n-2} \times$$

$$\times 5^2 \frac{n(n-1)}{2} - (-1)^n \times 2^{n-3} \times 5^3 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} +$$

$$+ 625N$$

n باید عددی فرد باشد تا $2^n + 3^n$ بر ۵ قابل باشد:

$$2^n + 3^n = 5n[2^{n-1} - (n-1)2^{n-2} \times 5 +$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{3} 2^{n-3} \times 5^2] + 625N \quad (n \geq 4)$$

مقدار داخل کروشه بر ۵ قابل قسمت نیست، بنابراین برای اینکه $2^n + 3^n$ بر

۶۲۵ قابل قسمت باشد باید n بر ۱۲۵ قابل قسمت باشد، یعنی $n = 125$.

به ازای $n = 1023$ هم $2^n + 3^n$ بر ۶۲۵ قابل قسمت نیست.

۲۹۰. z را بر حسب x و y بدست می آوریم:

$$z = -\frac{ax + by - d}{c} \quad (۱)$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x^r + y^r + z^r &= \\ &= \frac{(a^r + c^r)x^r + 2abxy + (b^r + c^r)y^r - 2d(ax + by) + d^r}{c^r} \end{aligned}$$

اگر صورت کسر را N بنامیم، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{a^r + c^r} [(a^r + c^r)x^r + 2a(a^r + c^r)(by - d)x + \\ &+ (b^r + c^r)y^r - 2bdy + d^r] = \\ &= \frac{1}{a^r + c^r} [(a^r + c^r)x + a(by - d)]^r - \\ &- \frac{a^r(by - d)^r}{a^r + c^r} + (b^r + c^r)y^r - 2bdy + d^r = \\ &= \frac{1}{a^r + c^r} [(a^r + c^r)x + a(by - d)]^r + \\ &+ \frac{c^r}{a^r + c^r} [(a^r + b^r + c^r)y^r - 2bdy + d^r] \end{aligned}$$

ضمناً داریم:

$$\begin{aligned} (a^r + b^r + c^r)y^r - 2bdy + d^r &= \\ &= (a^r + b^r + c^r)\left(y - \frac{bd}{a^r + b^r + c^r}\right)^r + \frac{d^r(a^r + c^r)}{a^r + b^r + c^r} \end{aligned}$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{[(a^2 + c^2)x + a(by - d)]^2}{c^2(a^2 + c^2)} +$$

$$+ (a^2 + b^2 + c^2) \frac{(y - \frac{bd}{a^2 + b^2 + c^2})^2}{a^2 + c^2} + \frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

عبارت مفروض مساوی مجموع سه مقدار مثبت است که فقط دو عبارت اول آن متغیر است و حداقل آن وقتی است که این دو عبارت مساوی صفر شود:

$$\begin{cases} y = \frac{bd}{a^2 + b^2 + c^2} \\ (a^2 + c^2)x + a(by - d) = 0 \end{cases}$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$x = \frac{ad}{a^2 + b^2 + c^2}; y = \frac{bd}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$z = \frac{cd}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{و با توجه به رابطه (۱):}$$

$$\frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{مقدار می‌نیم عبارت چنین است:}$$

۱۰۲۹۱) برای محاسبهٔ ماکزیمم و می‌نیم y_1 ، اگر $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ فرض

کنیم، داریم:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

و کسر مفروض به صورت زیر درمی‌آید:

$$y_1 = \frac{2at + b(1-t^2) + c(1+t^2)}{2a't + b'(1-t^2) + c'(1+t^2)} =$$

$$= \frac{(c-b)t^2 + 2at + (c+b)}{(c'-b')t^2 + 2a't + (c'+b')} \quad (۱)$$

اگر معادله (۱) را نسبت به t منظم کنیم، بدست می‌آید:

$$[c - b - y_1(c' - b')]t^2 + 2(a - a'y_1)t + c + b - y_1(c' + b') = 0$$

برای اینکه این معادله ریشه‌های حقیقی نسبت به مجهول t داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$(a - a'y_1)^2 - [c - b - y_1(c' - b')] \times [c + b - y_1(c' + b')] \geq 0$$

و یا:

$$(a'^2 + b'^2 - c'^2)y_1^2 - 2(aa' + bb' - cc')y_1 + a^2 + b^2 - c^2 \geq 0 \quad (2)$$

برای تعیین علامت این سه جمله‌ای، سه حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: سه جمله‌ای (۲) دارای دو ریشه حقیقی y'_1 و y''_1 است. برای این منظور باید داشته باشیم:

$$(ac' - ca')^2 + (bc' - cb')^2 - (ab' - ba')^2 \geq 0$$

اگر $a'^2 + b'^2 - c'^2 > 0$ باشد، باید $y_1 < y'_1$ یا $y_1 > y''_1$ باشد. یعنی نامساوی (۲) به ازای همه مقادیر y_1 بجز مقادیری که بین y'_1 و y''_1 واقع باشند، صادق است. در این صورت ریشه کوچکتر سه جمله‌ای (۲) متناظر با یک ماکزیمم و ریشه بزرگتر آن متناظر با یک می‌نیمم است (ماکزیمم و می‌نیمم نسبی).

اگر $a'^2 + b'^2 - c'^2 < 0$ باشد، نامساوی (۲) به ازای مقادیر بین y'_1 و y''_1 صادق است و ریشه کوچکتر متناظر با می‌نیمم و ریشه بزرگتر متناظر با ماکزیمم است.

حالت دوم: سه جمله‌ای (۲) دارای دو ریشه برابر است:

$$(ac' - ca')^2 + (bc' - cb')^2 - (ab' - ba')^2 = 0$$

در این حالت سه جمله‌ای (۲) هم علامت با اولین جمله خود است (بجز وقتی که

y_1 مساوی ریشه مضاعف سه جمله‌ای باشد).

اگر $a'^2 + b'^2 - c'^2 > 0$ باشد، سه جمله‌ای (۲) همیشه مثبت یا صفر است و این به معنای آنست که y_1 می‌تواند مساوی هر مقدار حقیقی دلخواهی باشد.

اگر $a'^2 + b'^2 - c'^2 < 0$ باشد، سه جمله‌ای (۲) هرگز مثبت نیست و نامساوی بجز برای جواب سه جمله‌ای صادق نیست که در این صورت هم کسر y_1 به یک مقدار ثابت تبدیل می‌شود.

حالت سوم: سه جمله‌ای (۲) دارای ریشه‌های موهومی است:

$$(ac' - ca')^2 + (bc' - cb')^2 - (ab' - ba')^2 < 0$$

در این حالت ضریب y_1^2 نمی‌تواند غیر مثبت باشد و نامساوی (۲) همیشه صادق است:

باین ترتیب بجز در حالت:

$$(ac' - ca')^2 + (bc' - cb')^2 - (ab' - ba')^2 > 0$$

y_1 دارای ماکزیمم و می‌نیمی نیست که در این صورت y_1' ماکزیمم و y_1'' می‌نیم است، بشرطی که داشته باشیم:

$$a'^2 + b'^2 - c'^2 > 0$$

و y_1' می‌نیم و y_1'' ماکزیمم است، اگر داشته باشیم:

$$a'^2 + b'^2 - c'^2 < 0$$

برای تکمیل این بحث باید حالت $a'^2 + b'^2 - c'^2 = 0$ را هم مورد توجه قرار دهیم. در این حالت شرط به صورت زیر درمی‌آید:

$$-2(aa' + bb' - cc')y_1 + a'^2 + b'^2 - c'^2 > 0;$$

$$2(aa' + bb' - cc')[y_1 - \frac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{2(aa' + bb' - cc')}] < 0$$

اگر $aa' + bb' - cc' > 0$ باشد داریم:

$$y_1 < \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{2(aa' + bb' + cc')}$$

و ماکزیم y_1 مقدار کسر سمت راست نامساوی است.
 و اگر $aa' + bb' - cc' < 0$ باشد، خواهیم داشت:

$$y_1 > \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2(aa' + bb' + cc')}$$

و مقدار می نیم y_1 ، کسر سمت راست نامساوی است.

(۲) با توجه به رابطه $3tg^3x = \frac{3tgx - tg^3x}{1 - 3tg^2x}$ داریم:

$$y_2 = \frac{3 - tg^2x}{1 - 3tg^2x} - tg^2x = \frac{3 - 2tg^2x + 3tg^4x}{1 - 3tg^2x}$$

با حذف مخرج بدست می آید:

$$3tg^4x - (2 - 3y_2)tg^2x + (3 - y_2) = 0 \quad (1)$$

برای tg^2x وقتی دو جواب حقیقی بدست می آید که داشته باشیم:

$$y_2 < -\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ یا } y_2 > \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

در حالت $y_2 < -\frac{4\sqrt{2}}{3}$ هر دو جواب tg^2x مثبت است و بنابراین

برای tgx جوابهای حقیقی بدست می آید.

در حالت $y_2 > \frac{4\sqrt{2}}{3}$ ، مجموع ریشهها منفی است. برای اینکه یکی

از ریشهها مثبت باشد باید حاصلضرب ریشهها منفی، یعنی $y_2 > 3$ باشد.

معادله (۱) نمی تواند دوریشه حقیقی داشته باشد، مگر اینکه داشته باشیم:

$$y_2 < -\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ یا } y_2 > 3$$

در این صورت ماکزیمی مساوی $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$ و می نیمی مساوی ۳ خواهد

داشت (ماکزیم و می نیم نسبی) و این می نیم به ازای $x = 0$ بدست می آید.

۲۹۲. جوابهای دستگاه چنین است:

$$x = a(\cos \alpha \cos 3\alpha + 3 \sin \alpha \sin 3\alpha)$$

$$y = a(\sin \alpha \cos 3\alpha - 3 \cos \alpha \sin 3\alpha)$$

و از آنجا پس از تبدیلهای لازم بدست می‌آید:

$$x^2 + y^2 = a^2(1 + 8 \sin^2 3\alpha)$$

این عبارت به ازای $\sin^2 3\alpha = 1$ حداکثر مقدار خود را دارد که در این صورت:

$$\alpha = (2k + 1)\frac{\pi}{6}$$

و به ازای $\sin^2 3\alpha = 0$ حداقل مقدار خود، یعنی وقتی که داشته باشیم:

$$\alpha = k\frac{\pi}{6}$$

۲۹۳. اگر ارتفاع مخروط محیطی را x و شعاع کره مفروض را R بگیریم؛

شعاع قاعده مخروط مساوی $R \sqrt{\frac{x}{x-2R}}$ می‌شود و بسادگی حجم آن مساوی:

$$\frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{x^2}{x-2R} \text{ خواهد شد. بنابراین می‌نیم حجم همراه با می‌نیم عبارت}$$

$$\frac{x^2}{x-2R} \text{ است و داریم:}$$

$$\frac{x^2}{x-2R} = \frac{x^2 - 4R^2 + 4R^2}{x-2R} = x + 2R + \frac{4R^2}{x-2R} =$$

$$= 4R + (x-2R) + \frac{4R^2}{x-2R}$$

حاصل ضرب دومتغیر مثبت $(x-2R)$ و $\frac{4R^2}{x-2R}$ مقداری است ثابت و

بنابراین مجموع آنها وقتی می‌نیم است که با هم برابر باشند:

$$x-2R = \frac{4R^2}{x-2R} \Rightarrow x = 4R$$

یعنی حجم می نیمم مخروط وقتی بدست می آید که ارتفاع آن مساوی $2R$ و شعاع قاعده آن مساوی $R/\sqrt{2}$ باشد.

۲۹۴. ارتفاع مخروط محاطی را x بگیرید، در این صورت شعاع قاعده آن

$\sqrt{x(2R-x)}$ و حجم آن مساوی $\frac{\pi}{3}x^2(R-x)$ خواهد شد. مجموع x و

$2R-x$ مقداری است ثابت و بنابراین حاصلضرب $x^2(2R-x)$ وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{2} = \frac{2R-x}{1} \Rightarrow x = \frac{4}{3}R$$

۲۹۵. اگر محیط مستطیل را $2p$ و یکی از بعدهای آن را x فرض کنیم،

مساحت شکل حاصل، پس از تبدیلهای ساده چنین می شود:

$$S = \frac{1}{2(\pi-2)} \left[\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2(\pi+2)}{4(\pi-2)} \right]$$

و واضح است که می نیمم S به ازای $x = \frac{p}{2}$ بدست می آید و مساحت

$$S_{\min} = \frac{p^2(\pi+2)}{8(\pi-2)^2} \text{ می نیمم می شود.}$$

۲۹۶. اگر قاعده بزرگتر دوزنقه را $2x$ فرض کنیم، طول قاعده کوچکتر

$$S = 2R\left(x + \frac{R^2}{x}\right) \text{ دوزنقه مساوی } \frac{2R^2}{x} \text{ می شود و بنابراین مساحت دوزنقه}$$

خواهد بود.

حاصلضرب متغیرهای مثبت x و $\frac{R^2}{x}$ مقداری است ثابت و بنابراین مجموع

آنها وقتی می نیمم است که با هم برابر باشند:

$$x = \frac{R^2}{x} \Rightarrow x = R$$

یعنی می نیمم مساحت موقعی بدست می آید که دوزنقه محیطی به مربع تبدیل شود.

۲۹۷. شعاع قاعدهٔ کوچکتر مخروط ناقص را x می‌گیریم، مولد مخروط

$$S = \pi \sqrt{2R(R+x)(R-x)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{وسط جانبی مخروط}$$

خواهد شد.

مجموع متغیرهای $(R+x)$ و $(R-x)$ مقداری است ثابت و بنابراین

حاصلضرب $(R+x)(R-x)^{\frac{1}{2}}$ وقتی ما کزیم است که داشته باشیم.

$$\frac{R+x}{1} = \frac{R-x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{R}{3}$$

و مساحت می‌نیم: $S_{\text{Min}} = \frac{1}{9} \pi R^2 \sqrt{3}$ می‌شود.

۲۹۸. اگر شعاع قاعدهٔ استوانه را x فرض کنیم، ارتفاع استوانه $h = \frac{V}{\pi x^2}$

خواهد شد و چنانچه شعاع کره، مساوی R باشد، خواهیم داشت:

$$4R^2 = \frac{V^2}{\pi^2 x^4} + 4x^2 \quad (1)$$

و چون حاصلضرب $(\frac{V^2}{\pi^2 x^4}) (4x^2)^2$ مقداری است ثابت، مجموع سمت راست

تساوی (۱) وقتی می‌نیم است که داشته باشیم:

$$\frac{V^2}{\pi^2 x^4} = 2x^2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi \sqrt{2}}}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V\sqrt{3}}{4\pi}} \quad \text{که در این صورت شعاع کره چنین می‌شود:}$$

۲۹۹. فرض کنیم بعد از t دقیقه فاصلهٔ دو قطار حداقل شود، در این مدت

قطار اول $0/8t$ کیلومتر و قطار دوم $0/6t$ کیلومتر تغییر محل داده است و بنابراین

فاصلهٔ اولی تا محل تلاقی خطهای راه آهن $(40 - 0/8t)$ کیلومتر و فاصلهٔ دومی تا

این نقطه $(0/61 - 50)$ کیلومتر است و بنابراین اگر فاصله دو قطار را x فرض کنیم، معادله زیر را خواهیم داشت:

$$x^2 = (40 - 0/81)^2 + (50 - 0/61)^2$$

$$1^2 - 1241 + (4100 - x^2) = 0 \quad \text{و یا:}$$

برای اینکه این معادله، نسبت به t ، ریشه‌های حقیقی داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\Delta = 62^2 - 4100 + x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 64 \geq 0$$

و بنابراین، حداقل مقدار x وقتی است که $x = 8$ باشد، که در این صورت $t = 62$ بدست می‌آید.

جواب: بعد از یک ساعت و ۲ دقیقه، فاصله دو قطار، به حداقل خود، یعنی ۸ کیلومتر می‌رسد.

۳۰۰. ارتفاع استوانه، با ارتفاع مکعب مستطیل برابر است. بنابراین حجم ماکزیم، برای مکعب مستطیل، وقتی است که، مساحت قاعده آن ماکزیم باشد. اگر بعدها‌های قاعده مکعب مستطیل را x و y بگیریم، $x^2 + y^2$ مقداری است ثابت (و برابر با مجذور قطر قاعده استوانه). بنابراین حاصلضرب $x \cdot y$ (یا $x^2 y^2$)، وقتی ماکزیم است که $x = y$ باشد.

جواب: حداکثر حجم، مربوط به مکعب مستطیلی است که قاعده آن به شکل مربع باشد.

۳۰۱. اگر طول قوس قطاع بزرگتر را (که با آن مخروط رامی‌سازیم)،

مساوی x و شعاع دایره را R بگیریم، شعاع قاعده مخروط $r = \frac{x}{2\pi}$ و ارتفاع آن

$$h = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 R^2 - x^2} \quad \text{یا} \quad \sqrt{R^2 - r^2}$$

حجم مخروط را V فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{x^2}{4\pi} \times \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 R^2 - x^2} =$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} (x^2) \cdot (4\pi^2 R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

و چون مجموع x^2 و $4\pi^2 R^2 - x^2$ ، مقداری است ثابت، ماکزیمم V وقتی است که داشته باشیم:

$$\frac{x^2}{1} = \frac{4\pi^2 R^2 - x^2}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 2\pi R \sqrt{\frac{2}{3}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (رادیان)}$$

به این ترتیب، قطاعی که از دایره جدا کرده ایم، باید مساوی $2\pi(1 - \sqrt{\frac{2}{3}})$ رادیان باشد (در حدود ۶۶ درجه)، تاحجم مخروطی که از قطاع بزرگتر درست می‌شود ماکزیمم بشود.

۳۰۲. جواب:

$$S_{\text{Min}} = -\sqrt{p^2 + q^2} \text{ و } S_{\text{Max}} = \sqrt{p^2 + q^2}$$

۳۰۳. چون $\frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x} > 0$ و $\frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} > 0$ است، با استفاده

از نامساوی معلوم:

$$\frac{1}{2}(a^n + b^n) \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

بدست می‌آید:

$$f(x) = \left(\frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x}\right)^n + \left(\frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^n \geq 2 \times$$

$$\times \frac{\left(\frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^n}{2} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \left(2 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^n = 2^{1-n} \left(2 + \frac{4}{\sin^2 2x} \right)^n$$

حداقل مقدار تابع $f(x)$ ، به ازای $\sin^2 2x = 1$ یا $x = \frac{1}{4}k\pi + \frac{\pi}{4}$

بدست می‌آید، یعنی:

$$f_{\text{Min}}(x) = 2^{1-n} \times 2^n = 2 \times 2^n$$

۳۰۴. راه حل اول. تابعهای y و $z = y^2$ باهم (یعنی به ازای يك مقدار x)، به حداقل یا حداکثر خود می‌رسند. داریم:

$$z' = \frac{1}{(x^2 + 4)^2} (x^2 - 2x - 4)$$

که به ازای $x_1 = 1 - \sqrt{5}$ و $x_2 = 1 + \sqrt{5}$ مساوی صفر می‌شود. اگر $x < x_1$ یا $x > x_2$ باشد، $z' > 0$ می‌شود و بنابراین به ازای $x = x_1$ ، تابع z ماکزیمم و به ازای $x = x_2$ ، می‌نیمم است (حدود تغییرات x از $-\infty$ تا $+\infty$ است، و وقتی x بسمت یکی از این دو، میل کند، حد y مساوی ۱ می‌شود و همانطور که ازمقادیر y به ازای جوابهای مشتق دیده می‌شود، این مقدار y ، معرف حداقل یا حداکثر تابع نیست) و داریم:

$$y_{\text{Max}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \text{ و } y_{\text{Min}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

راه حل دوم. مقدار زیررادیكال، به ازای همه مقادیر حقیقی x ، مثبت است و علاوه بر آن $y > 0$ است، بنابراین تساوی مفروض، هم‌ارز تساوی زیر است:

$$(x^2 + 4)y^2 = x^2 - 4x + 8$$

و یا:

$$(y^2 - 1)x^2 + 4x + (4y^2 - 8) = 0$$

برای حقیقی بودن ریشه‌های این معادله (نسبت به مجهول x)، باید ممیز آن

مثبت باشد:

$$-y^2 + 3y^2 - 1 > 0$$

که از آنجا بدست می آید:

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{5} < y^2 < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

و با توجه به مثبت بودن مقدار y ، خواهیم داشت:

$$\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} < y < \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < y < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

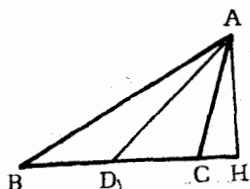
یعنی حداقل مقدار تابع مساوی $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ و حداکثر آن مساوی $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ است.

۳۰۵. قبلاً به حل این مسئله می پردازیم:

روی ضلع BC ، از مثلث ABC ، نقطه D را چنان پیدا کنید که پاره خط AD به طول حداکثر یا به طول حداقل باشد.

در مثلث ABC ، فرض می کنیم $AB > AC$ باشد. نقطه دلخواه D_1

را روی ضلع BC انتخاب می کنیم (شکل ۱۵۵). چون:



$$\angle AD_1B > \angle C > \angle B$$

شکل ۱۵۵

بنابراین $AB > AD_1$. به این

ترتیب، پاره خط AD ، وقتی حداکثر طول را خواهد داشت که بر AB منطبق باشد. درحالتی که $AB = AC$ باشد، دو جواب داریم: AB و AC .

اگر هیچکدام از زاویه های B و C منفرجه نباشند، روشن است که پاره خط AD ، وقتی به طول می نیم است که بر AD عمود باشد. اما اگر یکی از دو زاویه B و C ، و مثلاً C ، منفرجه باشد، پای ارتفاع AH در خارج ضلع BC قرار می گیرد و چون مایل AC از هر مایل دیگری، مثل AD_1 کوتاهتر است، بنابراین AD وقتی به طول می نیم است که بر AC منطبق باشد.

حالا به حل مسأله می پردازیم:

ضلع AB از

مثلث ABC را ، از

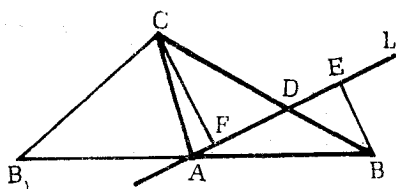
طرف A به اندازه

پاره خط AB_1 مساوی

AB امتداد می دهیم

(شکل ۱۵۶). هر خطی

که از رأس A عبور کند



شکل ۱۵۶

یا پاره خط BC و یا پاره خط B_1C را قطع می کند. اگر خط 1 ، پاره خط BC را، در

نقطه D قطع کند، عمودهای BE و CF را بر آن رسم می کنیم. مساحت S از مثلث

ABC ، مساوی مجموع مساحت های دو مثلث ACD و ABD است. بنابراین:

$$S = \frac{1}{2} AD \cdot BE + \frac{1}{2} AD \cdot CF$$

و از آنجا:

$$BE + CF = \frac{2S}{AD}$$

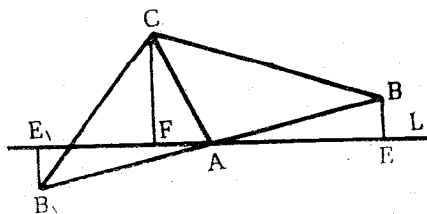
چون مقدار S ثابت است، $BE + CF$ وقتی می نیم است که AD ماکزیم

باشد؛ بنابراین اگر $AB > AC$ باشد، باید 1 بر AB منطبق شود، در این صورت

مجموع فاصله های مورد نظر، مساوی ارتفاع مثلث، که از رأس C می گذرد،

خواهد شد. اگر $AB = AC$ باشد، می توان 1 را منطبق بر AB یا AC

گرفت.



شکل ۱۵۷

حالا فرض می کنیم

که خط 1 ، پاره خط

B_1C را قطع کند (شکل

۱۵۷). B_1E_1 را عمود

بر 1 رسم می کنیم. از

تساوی مثلث های ABE

و AB, E_1 نتیجه می‌شود که $BE = B_1E_1$. حالا مجموع فاصله‌های B, E_1 و CF تا خط l را مورد بررسی قرار می‌دهیم. شبیه استدلال حالت قبل معلوم می‌شود که اگر $AB > AC$ باشد، خط مطلوب بر AB منطبق است و اگر $AB = AC$ باشد، یکی از خط‌های AB یا AC جواب مسأله است.

برای اینکه مجموع فاصله‌های $BE + CF = \frac{2S}{AD}$ ماکزیمم باشد،

باید خط l را چنان رسم کرد که پاره خط AD از آن حداقل شود. اگر زاویه A منفرجه باشد و خط l ، ضلع BC را قطع کند، حداقل AD وقتی است که AD بر BC عمود باشد (چون زاویه A منفرجه است، ارتفاع AD در داخل مثلث قرار می‌گیرد)، در این صورت مقدار حداکثر مجموع فاصله‌های B و C از AD مساوی BC می‌شود. اگر خط l ، پاره خط B_1C را قطع کند، حداقل مقدار AD برابر است با ارتفاع مثلث AB_1C که بر ضلع B_1C فرود آمده باشد و یا کوچکترین ضلع، از بین دو ضلع AB_1 و AC . در این حالت حداکثر مجموع فاصله‌های B و C از l ، از طول پاره خط B_1C تجاوز نمی‌کند. از مثلث‌های ABC و AB_1C معلوم می‌شود که $BC > B_1C$ ، بنابراین: اگر زاویه A از مثلث ABC ، منفرجه باشد، خط مطلوب l عمود بر BC خواهد بود و حداکثر مجموع فاصله‌های B و C از آن برابر با ضلع BC می‌شود.

جای B و B_1 را با هم عوض می‌کنیم، به این نتیجه می‌رسیم: اگر در مثلث

ABC ، زاویه A حاده باشد، خط مطلوب l ، عبارتست از خطی که از A بر

B_1C یا میانه AM

(از مثلث ABC)

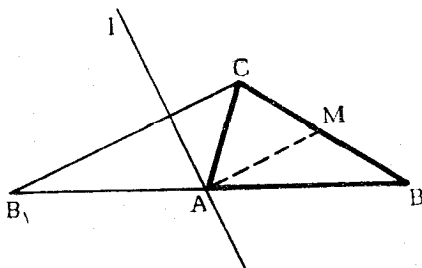
عمود باشد (شکل ۱۵۸)

و در این صورت فاصله

دورأس B و C از آن

مساوی B_1C یعنی دو

برابر میانه AM خواهد



شکل ۱۵۸

شد (که از BC بزرگتر است).

بالاخره، در حالتی که زاویه A قائمه باشد، به علت اینکه $CB = CB_1$

مسئله دوجواب خواهد داشت، یکی وقتی که خط l منطبق بر ارتفاع مثلث ABC باشد و دیگری وقتی که خط l عمود بر میانه AM از مثلث ABC باشد.

۳۰۶. طول پاره خطهای AM و AN (شکل ۱۵۹) را بترتیب x و y

می گیریم، بنا بر قضیه کسینوسها داریم:

$$\begin{aligned} MN^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos A = (x - y)^2 + 2xy(1 - \cos A) = \\ &= (x - y)^2 + 4Q \operatorname{tg} \frac{A}{2} \end{aligned}$$

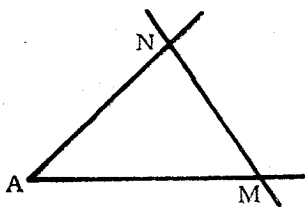
(از رابطه $Q = \frac{1}{2}xy \sin A$ ، استفاده

کردیم). بنابراین، حداقل پاره خط

MN وقتی است که $x = y$ ، یعنی

$AM = AN$ باشد و در این صورت

داریم:



شکل ۱۵۹

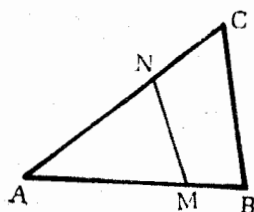
$$MN = \sqrt{4Q \operatorname{tg} \frac{A}{2}}$$

۳۰۷. فرض می کنیم، MN پاره خط مطلوب باشد (شکل ۱۶۰)، اگر

مساحت مثلث ABC را مساوی S فرض کنیم، مساحت مثلث AMN

مساوی $\frac{1}{4}S$ می شود که با توجه به مسئله ۳۰۶، بدست می آید:

$$MN = \sqrt{2S \operatorname{tg} \frac{A}{2}}$$



شکل ۱۶۰

AM را بر حسب ضلعهای b و c ،
از مثلث ABC ، محاسبه می‌کنیم.
چون مساحت مثلث AMN مساوی
نصف مساحت مثلث ABC است،
بنابراین داریم:

$$AM^2 \sin A = \frac{1}{2} bc \sin A \Rightarrow AM = \sqrt{\frac{bc}{2}}$$

طبق شرط مسأله، N و M باید روی ضلعهای AC و AB واقع باشند، بنابراین
مقداری که برای AM بدست آمده است، نباید از هیچ‌یک از دو ضلع b و c بزرگتر
باشد. اگر $b < c$ بگیریم، باید داشته باشیم: $\sqrt{\frac{bc}{2}} < b$ ، که از آنجا بدست
می‌آید: $c < 2b$. به این ترتیب اگر $b < c < 2b$ باشد، می‌توانیم روی ضلعهای
 AC و AB ، نقطه‌های N و M را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$AM = AN = \sqrt{\frac{bc}{2}}$$

بسادگی می‌توان ثابت کرد که اگر $c > 2b$ باشد، پاره خط مورد نظر، بر
میانه ضلع c منطبق است و ضمناً در این حالت، طول این میانه هم مساوی
 $\sqrt{2 \operatorname{Stg} \frac{A}{2}}$ خواهد شد.

می‌توان این مسأله را کلی‌تر طرح کرد: مثلث مفروض ABC داده وسیله
پاره خطی با حداقل طول به دو قسمت هم از تقسیم کنید.
فرض می‌کنیم $a < b < c$ باشد، در این صورت خواهیم داشت:

یعنی $a < a + b < 2b$ ، پاره خط MN که ضلعهای زاویه A
را قطع کند (و مساوی $\sqrt{2 \operatorname{Stg} \frac{A}{2}}$ است)، پاره خط مورد نظر است، زیرا

این پاره خط، از پاره خطهای نظیر مربوط به زاویه های B و C کوچکتر است:

$$\sqrt{\frac{2Stg A}{2}} < \sqrt{\frac{2Stg B}{2}} < \sqrt{\frac{2Stg C}{2}}$$

بنابراین، باید روی ضلعهای کوچکترین زاویه مثلث، دو نقطه M و N را طوری پیدا کرد که داشته باشیم:

$$AM = AN = \sqrt{\frac{bc}{2}}$$

۳۰۸. مجموع همه حاصلضربهای ممکنه دو به دو ی عددهای $x_1, x_2, \dots, x_n$

را می توان به اینصورت نوشت:

$$s = \frac{1}{2} [(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)]$$

روشن است که:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \geq 0, \quad -(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \geq -n$$

بنابراین، مجموع s نمی تواند از $-\frac{n}{2}$ کوچکتر باشد.

اگر n عددی زوج باشد، نیمی از عددهای x_k را مساوی ۱ و نیم دیگر

آنها را مساوی -۱ می گیریم، در اینصورت هر دو نامساوی فوق، به تساوی تبدیل می شود و بدست می آید:

$$s = -\frac{n}{2}$$

اگر n عددی فرد باشد، چون s تنها مقادیر صحیح می تواند باشد:

$$s \geq -\frac{n-1}{2}$$

حداقل مقدار s، مثلاً وقتی است که بین عددهای x_k ، تعداد $\frac{n+1}{2}$ را مساوی ۱ و

تعداد $\frac{n-1}{2}$ را مساوی ۱ - بگیریم.

جواب: وقتی n عددی زوج باشد: $-\frac{n}{2}$ ؛ و وقتی n عددی فرد باشد:

$$-\frac{n-1}{2}$$

۳۰۹. ثابت می‌کنیم که می‌توان هر یک از عددهای x_k را به ۱ یا -۱ تبدیل کرد، بنحوی که مجموع همه انواع حاصلضربهای دوه دوی آنها، بزرگ نشود؛ در این صورت، این مسأله، به مسأله ۳۰۸ منجر می‌شود.

x_k را وقتی به ۱ - تبدیل می‌کنیم که مجموع بقیه $(n-1)$ عدد غیر منفی باشد و وقتی به ۱ تبدیل می‌کنیم که مجموع بقیه غیر مثبت باشد؛ در این صورت عبارت $x_1(x_2 + \dots + x_n)$ و در نتیجه، همه مجموع حاصلضربهای ممکنه دوه دو اضافه نمی‌شود. همین عمل را درباره $x_2, x_3, \dots, x_n$ هم تکرار می‌کنیم. حکم ثابت است.

متذکر می‌شویم که این استدلال تنها برای حالت فرد بودن n لازم است، زیرا در این حالت، بلافاصله نمی‌توان نتیجه گرفت که مجموع حاصلضربهای دو به دو، نمی‌تواند از $-\frac{n-1}{2}$ کمتر شود.

۳۱۰. اگر زاویه رأس مخروط را روی مقطع محوری آن α ، شعاع قاعده مخروط را r و مولد آنرا l بگیریم، بسادگی بدست می‌آید (R شعاع کره است):

$$\begin{cases} r = l \cdot \sin \alpha \\ l = r \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow r = r \cos \alpha \sin \alpha = R \sin^2 \alpha$$

و بنابراین سطح کل مخروط چنین می‌شود:

$$2\pi R^2 \cos \alpha \sin^2 \alpha + \pi R^2 \sin^2 \alpha = \pi R^2 (\cos \alpha \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

یعنی باید α را طوری پیدا کرد که تابع

$$\frac{1}{4} [2 \cos \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha] = \sin \alpha (1 - \sin \alpha) (1 + \sin \alpha)^2$$

ماکزیمم باشد. $\sin \alpha = x$ می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$P(x) = -x^4 - x^3 + x^2 + x$$

روشن است که داریم: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ و بنابراین: $0 < x = \sin \alpha$. ضمناً به ازای

$\alpha = 0$ یا $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (حدود متغیر)، مقدار سطح کل مساوی صفر می‌شود و بنابراین

ماکزیمم سطح کل به ازای یکی از جوابهای مشتق بدست می‌آید:

$$P'(x) = -4x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = -(x+1)(4x^2 - x - 1),$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4},$$

$$x_3 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

که اگر از جوابهای منفی بگذریم، معلوم می‌شود که تابع به ازای

$$x = \sin \alpha = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \approx 0.64$$

به حداکثر مقدار خود می‌رسد. که از آنجا $79^\circ 40' \approx 2\alpha$ می‌شود:

۳۱۱. تابع مورد بررسی، عبارتست از طول پاره خط $S_1 S_2$ ، که در آن

S_1 و S_2 موضعیهای متحرکها، بعد از گذشت فاصله زمانی t ، در نظر گرفته شده است

(شکل ۶۲، صفحه ۱۴۶ را ببینید). در مثلث $S_1 B S_2$ داریم:

$$S_1 S_2^2 = S_1 B^2 + S_2 B^2 - 2 S_1 B \cdot S_2 B \cos \beta \quad (0 < \beta < \frac{\pi}{2})$$

از طرف دیگر روشن است که: $BS_2 = v_2 t$ ، $AS_1 = v_1 t$ و بنابراین

$$y(t) = S_1 S_2^2 = (a - v_1 t)^2 + (v_2 t)^2 - 2(a - v_1 t)(v_2 t) \cos \beta$$

و بنابراین تابع مورد نظر چنین می‌شود:

$$f(t) = \sqrt{(a - v_1 t)^2 + (v_2 t)^2 - 2(a - v_1 t)(v_2 t) \cos \beta}$$

می‌نیم $f(t)$ برمی‌نیم $y(t)$ منطبق است. اگر $y'(t)$ را مساوی صفر قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$t = \frac{a(v_1 + v_2 \cos \beta)}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \beta} \quad (۱)$$

$y(t)$ نسبت به t يك سه جمله‌ای درجه دوم است که ضریب درجه دوم آن (t^2) چنین است:

$$v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \beta \quad (v_1 > 0, v_2 > 0)$$

و چون این ضریب همیشه مثبت است، می‌نیم نسبی تابع $y(t)$ برمی‌نیم مطلق آن منطبق می‌شود. بنابراین برای اینکه فاصله $S_1 S_2$ به حداقل خود برسد، باید t مساوی مقداری باشد، که از رابطه (۱) بدست می‌آید.

۳۱۲. روشن است که اگر برای نقطه‌های (x, y) داشته باشیم $x > 2$ و $y > 2$ ، در معادله مفروض صدق نخواهد کرد و بنابراین باید داشته باشیم:

$$1 < x < 2 \text{ و } 1 < y < 2$$

به این ترتیب: $f(x, y) = \frac{y}{x} > \frac{1}{2}$ و چون مختصات نقطه $(2, 1)$ در معادله صدق

می‌کند، حداقل تابع $f(x, y)$ مساوی همان $\frac{1}{2}$ می‌شود.

۳۱۳. با استفاده از این مطلب که حداقل مجموع دو عدد مثبت و عکس هم مساوی است با ۲، داریم:

$$\begin{aligned} rS = & \left(\frac{ra}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{ra} \right) + \left(\frac{rb}{a+c+d} + \right. \\ & \left. + \frac{a+c+d}{rb} \right) + \left(\frac{rc}{a+b+d} + \frac{a+b+d}{rc} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{3d}{a+b+c} + \frac{a+b+c}{3d} \right) + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{b}{d} + \frac{d}{b} \right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c} \right) \right] > \\
 & \geq 2 \times 4 + \frac{1}{3} \times 2 \times 6 = 40.
 \end{aligned}$$

و بنابراین $S > \frac{40}{3}$. مقدار $\frac{40}{3}$ وقتی بدست می آید که داشته باشیم:

$$a = b = c = d$$

۳۱۴. بترتیب داریم:

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z, t) &= 1 + \left(\frac{ax^y + by^x}{ax + by} - 1 \right) + \frac{az^y + bt^y}{az + bt} = \\
 &= 1 + \frac{-axz - byt}{ax + by} + \frac{az^y + bt^y}{az + bt} = \\
 &= 1 + \frac{ab(z-t)(zy - xt)}{(ax + by)(az + bt)} = \\
 &= 1 + \frac{ab(z-t)^2}{(ax + by)(az + bt)}
 \end{aligned}$$

و این تساوی نشان می دهد که حداقل مقدار تابع مفروض برابر است با ۱؛ این حداقل وقتی بدست می آید که $z = t$ باشد (با کمی تغییر نوع محاسبه، می توان همین نتیجه را برای حالت $x = y$ هم گرفت).

طبق شرط مسأله داریم: $0 \leq x, y, z, t \leq 1$ در این صورت:

$$\begin{cases} ax^y \leq ax, by^x \leq by, az^y \leq az, bt^y \leq bt; \\ ax^y + by^x \leq ax + by, az^y + bt^y \leq az + bt \end{cases} \quad (1)$$

و بنابراین $f(x, y, z, t) \leq 2$ ؛ حالت تساوی مربوط به وقتی است که مثلاً داشته باشیم: $x = t = 0$ و $y = z = 1$.

۳۱۵. مرکز تقارن منحنی $O'(0,0)$ ، یعنی مبدا مختصات است. از حل خط $y = mx$ با معادله منحنی، مختصات نقطه‌های A و B بدست می‌آید و از آنجا طول پاره خط AB چنین می‌شود:

$$AB^2 = f(m) = \frac{400(m^2 + 1)}{52m^2 + 72m + 73}$$

$f(m)$ تابعی پیوسته است و بنابراین ما کزیم و می نیمم مطلق آن برما کزیم و می نیمم نسبی منحنی آن منطبق می‌شود:

$$y' = \frac{2400(12m^2 + 7m - 12)}{(52m^2 + 72m + 73)^2} ;$$

$$y' = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{4}{3}, m_2 = \frac{3}{4} ;$$

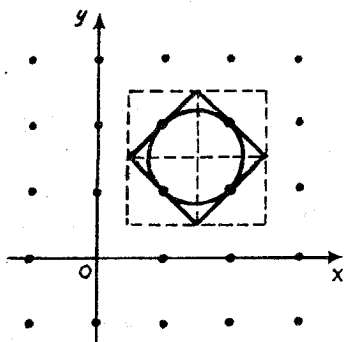
که اگر بجای m ، در رابطه طول AB ، قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$\left| \begin{array}{l} m = -\frac{4}{3} \\ AB = 4 \text{ (حداکثر)} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} m = \frac{3}{4} \\ AB = \frac{6}{5} \text{ (حداقل)} \end{array} \right|$$

توضیح: منحنی تابع مفروض يك بیضی است، بنابراین از حل این مسأله

نتیجه می‌شود که خط $y = -\frac{4}{3}x$ ، امتداد قطر بزرگتر و $y = \frac{3}{4}x$ ، امتداد

قطر کوچکتر بیضی را معین می‌کند، یعنی این دو خط، محوره‌های بیضی‌اند.



شکل ۱۶۱

۳۱۶. از صورت مسأله، نمی-

توان فهمید که آیا مربع مورد نظر شامل

محیط آن هم می‌شود یا بدون توجه به

محیط، در نظر گرفته شده است؛ به

عبارت دیگر، اگر در داخل مربعی،

هیچیک از نقطه‌های با مختصات صحیح

وجود نداشته باشد، ولی روی محیط آن،

از این نقطه‌ها وجود داشته باشد، می‌تواند به عنوان جواب به حساب آید؟

اگر شرط را بر این بگیریم که نقطه‌های مفروض روی ضلعهای مربع هم قرار نگیرند، مربع مشخصی با مساحت حداکثر، بدست نمی‌آید، در این حالت برای هر مربعی که نه روی ضلعها و نه در داخل آن، نقطه‌ای با مختصات صحیح نباشد، می‌توان با «اندکی» بزرگ کردن آن، باز هم مربعی با همین خاصیت بدست آورد. بنابراین به حالتی می‌پردازیم، که نقطه‌های با مختصات صحیح بتوانند روی ضلعهای مربع قرار گیرند. اگر از چهار نقطه مجاور هم (شکل ۱۶۱) دایره‌ای عبور دهیم، بزرگترین دایره‌ای خواهد بود که در درون آن هیچیک از نقطه‌های با مختصات صحیح وجود ندارد. بنابراین مربع مورد نظر، مربع محیطی همین دایره است، که ضلعهای آن در چهار نقطه مذکور، بر دایره مماس باشد، و بسادگی معلوم می‌شود که مساحت چنین دایره‌ای برابر است با ۲.

تابع اولیه و محاسبه سطح و حجم

۳۱۷. اگر از مجموع مفروض، مشتق بگیریم، مجموع زیر بدست می‌آید:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad (1)$$

با توجه به شرط $|x| < 1$ ، می‌توان حد مجموع (۱) را، که حد مجموع جمله‌های يك تعاعد هندسی نزولی است، بدست آورد:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1 + x^2}$$

مجموع مطلوب، تابع اولیه $\frac{1}{1+x^2}$ ، بدون مقدار ثابت (چرا؟)، است.

جواب: $\text{Arctg } x$.

۳۱۸. اگر مجموع مفروض را S و تابع اولیه آنرا S فرض کنیم، داریم:

$$S = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \dots$$

$$Sx = x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \dots \quad \text{و ضمناً:}$$

از تفاضل این دو رابطه بدست می‌آید:

$$S(1-x) = x^1 + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x^1}{1-x}$$

(از شرط $|x| < 1$ ، استفاده کردیم). از آنجا:

$$S = \frac{x^1}{(1-x)^2}$$

مجموع S ، عبارتست از مشتق S نسبت به x :

$$s = S'_x = \frac{1x(1-x)^1 + 1x^2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1x}{(1-x)^2}$$

۳۱۹. از T_n تابع اولیه و سپس از حاصل آن مشتق بگیرید.

$$T_n = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{1}{2}(n+1)x - \sin \frac{1}{2}nx}{1 \sin \frac{1}{2}x} \quad \text{جواب:}$$

۳۲۰. با توجه به رابطه $x = \frac{1}{a}(ax+b) - \frac{b}{a}$ داریم:

$$y = \frac{1}{a}(ax+b)^{m+1} - \frac{b}{a}(ax+b)^m;$$

و از آنجا:

$$Y = \frac{1}{a^2(m+2)}(ax+b)^{m+2} - \frac{b}{a^2(m+1)}(ax+b)^{m+1} + c$$

$$Y = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a^2(m+1)(m+2)}[a(m+1)x - b] + c \quad \text{جواب:}$$

۳۲۱. با توجه به رابطه $x^2 = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1$ داریم:

$$y = x^2(x-1)^{-\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Y = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + c \quad \text{و از آنجا:}$$

$$Y = \frac{2}{15}(3x^2 + 4x + 8)\sqrt{x-1} + c \quad \text{جواب:}$$

۳۲۲. اگر $1-x=t$ قرض کنیم، داریم: $x=1-t$ و بنابراین:

$$\begin{aligned} x^3+x^2+x+1 &= (1-t)^3+(1-t)^2+(1-t)+1 \\ &= -t^3+4t^2-6t+4= \\ &= -(1-x)^3+4(1-x)^2-6(1-x)+4 \end{aligned}$$

و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} y &= (x^3+x^2+x+1)(1-x)^{-\frac{1}{3}} = \\ &= -(1-x)^{\frac{2}{3}}+4(1-x)^{\frac{5}{3}}-6(1-x)^{\frac{2}{3}}+4(1-x)^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

و بنابراین:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{3}{11}(1-x)^{\frac{11}{3}} - \frac{3}{2}(1-x)^{\frac{8}{3}} + \frac{18}{5}(1-x)^{\frac{5}{3}} - \\ &- 6(1-x)^{\frac{2}{3}} + c \end{aligned}$$

جواب: $Y = -\frac{3}{110}(10x^3+25x^2+52x-307)\sqrt[3]{(x-1)^2}$

۳۲۳. تابع y را به ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} y &= x^3 \cdot x^4(x^2-1)^{-\frac{1}{5}} = x^7[(x^2-1)^3+ \\ &+ 3(x^2-1)^2+3(x^2-1)+1](x-1)^{-\frac{1}{5}} = \\ &= x^7(x^2-1)^{\frac{14}{5}} + 3x^7(x^2-1)^{\frac{9}{5}} + \\ &+ 3x^7(x^2-1)^{\frac{4}{5}} + x^7(x^2-1)^{-\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

جواب: $Y = \frac{5}{4788}[84(x^2-1)^3+342(x^2-1)^2+$

$$+ 532(x^2 - 1) + 399] \sqrt{(x^2 - 1)^5}$$

۳۲۴. تابع y را می‌توان چنین نوشت:

$$y = \frac{(2x+3)^5}{(5x-1)^7} = \frac{1}{(5x-1)^2} \left(\frac{2x+3}{5x-1} \right)^5$$

اکنون با توجه به رابطه $\left(\frac{2x+3}{5x-1} \right)' = \frac{-17}{(5x-1)^2}$ خواهیم داشت:

$$Y = -\frac{1}{102} \left(\frac{2x+3}{5x-1} \right)^5 + c$$

$$Y = \frac{1}{(n+1)(ad-bc)} \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{n+1} \quad : \text{جواب ۳۲۵}$$

۳۲۶. روش اول- بترتیب داریم:

$$y = \frac{1 - \sin X}{1 + \sin X} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - X\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - X\right)} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{X}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{X}{2}\right)} =$$

$$= \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{X}{2}\right) = \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{X}{2}\right) \right] - 1 ;$$

$$Y = -2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{X}{2}\right) - X + c$$

روش دوم- بترتیب داریم:

$$\begin{aligned} y = \frac{1 - \sin X}{1 + \sin X} &= \frac{(1 - \sin X)^2}{1 - \sin^2 X} = \frac{1 - 2 \sin X + \sin^2 X}{\cos^2 X} = \\ &= (1 + \operatorname{tg}^2 X) - 2 \sin X \cos^{-2} X + \operatorname{tg}^2 X = \\ &= 2(1 + \operatorname{tg}^2 X) - 2 \sin X \cos^{-2} X - 1 ; \end{aligned}$$

$$Y = 2 \operatorname{tg} X - \frac{2}{\cos X} - X + c = -\frac{2(1 - \sin X)}{\cos X} - X + c$$

۳۲۷. تابع را بترتیب چنین می نویسیم:

$$y = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)(1+\sqrt{1+x^2})}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \left(1 + \sqrt{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

که با توجه به رابطه $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = (1 + \sqrt{1+x^2})'$ خواهیم داشت:

$$Y = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1+x^2}} + c$$

$$Y = \frac{1 + \sin x}{\cos x} + c \quad \text{۳۲۸. جواب:}$$

۳۲۹. داریم:

$$x^5 + x^2 + x = x(x^4 + x^2 + 1) =$$

$$= x[(x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1) + 1]$$

و بنابراین تابع به صورت زیر در می آید:

$$y = x(x^2 + 1)^{m+2} - x(x^2 + 1)^{m+1} + x(x^2 + 1)^m ;$$

$$Y = \frac{1}{2(m+3)} (x^2 + 1)^{m+2} - \quad \text{جواب:}$$

$$- \frac{1}{2(m+2)} (x^2 + 1)^{m+1} + \frac{1}{2(m+1)} (x^2 + 1)^m + c$$

۳۳۰. بترتیب داریم:

$$y = \cos x \cdot \cos^4 x - \cos x (1 - \sin^2 x)^2 =$$

$$= \cos x \cdot \sin^4 x - 4 \cos x \cdot \sin^2 x +$$

$$+ 6 \cos x \cdot \sin^4 x - 4 \cos x \cdot \sin^2 x + \cos x$$

جواب:

$$Y = \frac{1}{9} \sin^6 x - \frac{4}{9} \sin^4 x + \frac{6}{5} \sin^2 x - \frac{4}{3} \sin^2 x + \sin x + c$$

۳۳۱. تابع را به ترتیب زیر تبدیل می‌کنیم:

$$y = (1 + \cot^2 x) \cot^4 x - (1 + \cot^2 x) \cot^2 x + (1 + \cot^2 x) \times \\ \times \cot^2 x - (1 + \cot^2 x) \cot^2 x + (1 + \cot^2 x) - 1$$

جواب:

$$Y = -\frac{1}{9} \cot^6 x + \frac{1}{9} \cot^4 x - \frac{1}{5} \cot^2 x + \frac{1}{3} \cot^2 x - \cot x - \\ - x + c$$

۳۳۲. صورت ضرب تابع را به مجموع تبدیل می‌کنیم:

$$y = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

جواب:

$$Y = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{m+n} \cos(m+n)x - \frac{1}{m-n} \cos(m-n)x \right] + c$$

۳۳۳. از این رابطه‌ها استفاده کنید:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{1}{16} (\sin^2 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$$

$$= \frac{1}{16} (\sin^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha + 1 \sin^2 \alpha)$$

در این صورت تابع y به صورت زیر درمی‌آید:

$$Y = \frac{1}{64} (\sin 20^\circ X - 5 \sin 16^\circ X + 10 \sin 12^\circ X + \\ + 2 \sin 10^\circ X - 10 \sin 8^\circ X - 5 \sin 6^\circ X + 2 \sin 4^\circ X)$$

$$Y = \frac{1}{64} \left(-\frac{1}{20} \cos 20^\circ X + \frac{5}{16} \cos 16^\circ X - \frac{5}{6} \cos 12^\circ X - \right. \\ \left. - \frac{1}{5} \cos 10^\circ X + \frac{5}{4} \cos 8^\circ X + \frac{5}{6} \cos 6^\circ X - 10 \cos 4^\circ X \right) + c$$

۳۳۴. بسادگی معلوم می شود که: $y = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

جواب: $Y = \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + c$

۳۳۵. جواب:

$$Y = \frac{1}{2(a+b)} \sqrt{a \sin^2 x + b \cos^2 x + c} + C$$

۳۳۶. بسادگی معلوم می شود که: $y = \cotg \frac{x}{4}$

جواب: $y = 2 \ln \sin \frac{x}{4} + c$

۳۳۷. تابع y را می توان چنین نوشت:

$$y = \frac{(x^2 + x^2 + x + 1)^2 - (3x^2 + 2x + 1)}{(x^2 + x^2 + x + 1)^2} = \\ = 1 - (3x^2 + 2x + 1)(x^2 + x^2 + x + 1)^{-2}$$

جواب: $Y = \frac{x^2}{x^2 + x^2 + x + 1} + c$

۳۳۸. تابع را می توان به این ترتیب تبدیل کرد:

$$y = \frac{a}{\sin^2 x} [(\cotg x - 1) + 1](\cotg x - 1)^m =$$

$$= \frac{a}{\sin^2 x} (\cotg x - 1)^{m+1} + \frac{a}{\sin^2 x} (\cotg x - 1)^m$$

جواب:

$$Y = - \frac{a}{(m+1)(m+2)} (\cotg x - 1)^{m+1} \times \\ \times [(m+1)\cotg x + 1] + c$$

۳۳۹. تابع رامی توان به صورت $y = \frac{2}{3} \sin x (1 - \cos x)^{\frac{1}{3}}$ نوشت.

$$Y = \frac{45}{11} (1 - \cos x) \sqrt[15]{(1 - \cos x)^9} + c \quad \text{جواب:}$$

۳۴۰. تابع به صورت $y = (1 + \tg^2 x) \tg^n x$ تبدیل پذیر است.

$$Y = \frac{1}{n+1} \tg^{n+1} x + c \quad \text{جواب:}$$

$$Y = \frac{2}{3} (x+2) \sqrt{x} + c \quad \text{جواب: ۳۴۱}$$

$$Y = \frac{4}{105} x (15 - 7x^2) \sqrt[4]{x^2} + c \quad \text{جواب: ۳۴۲}$$

$$Y = x - \arctg x + c \quad \text{جواب: ۳۴۳}$$

$$Y = \frac{1}{4} \arctg \frac{x^2}{2} + c \quad \text{جواب: ۳۴۴}$$

$$y = 2 \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + (\sqrt{x})^2} \quad \text{۳۴۵. تابع را بصورت می نویسیم:}$$

$$Y = 2 \arctg \sqrt{x} + c \quad \text{جواب:}$$

$$Y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + c \quad \text{جواب: ۳۴۶}$$

$$Y = \frac{2}{3} \sqrt[3]{x^2 - 1} + c \quad \text{جواب: ۳۴۷}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 2(\sqrt{x})' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \quad \text{داریم: ۳۴۸}$$

$$Y = 2 \arcsin \sqrt{x} + c \quad \text{جواب:}$$

$$Y = \frac{3}{4} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} + c \quad \text{جواب: ۳۴۹}$$

$$۳۵۰. \text{ تابع مفروض را می توان چنین نوشت:}$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)'}{2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)'}{2\left[1 + \left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}\right)^2\right]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}\right)'}{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + c \quad \text{جواب:}$$

$$۳۵۱. \text{ تابع مفروض را می توان چنین نوشت:}$$

$$y = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} =$$

$$= (1 + \operatorname{tg}^2 x) + (1 + \operatorname{cotg}^2 x)$$

$$Y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c \quad \text{جواب:}$$

$$۳۵۲. \text{ تابع } y \text{ را می توان چنین نوشت:}$$

$$y = \cos x \cdot (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin^{\frac{1}{2}} x = \cos x \cdot \sin^{\frac{1}{2}} x -$$

$$- 2 \cos x \sin^{\frac{5}{2}} x + \cos x \sin^{\frac{9}{2}} x$$

$$Y = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \sin^2 x + \frac{2}{11} \sin^4 x\right) \sqrt{\sin^2 x} + c \quad \text{جواب:}$$

۳۵۳. تابع مفروض را به این ترتیب می‌نویسیم:

$$y = \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}$$

جواب: $Y = -\sqrt{a^2-x^2} + a \cdot \arcsin \frac{x}{a} + c$

۳۵۴. جواب: $Y = \frac{x|x|}{2} + c$

۳۵۵. جواب: $Y = \frac{x^2|x|}{3} + c$

۳۵۶. جواب: $Y = \frac{2}{3}x^2(x+|x|) + c$

۳۵۷. جواب: $Y = \frac{1}{2}(1+x)|1+x| + \frac{1}{2}(1-x)|1-x| + c$

۳۵۸. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ و در نتیجه $f(x) = 2\sqrt{x} + c$ می‌شود

۳۵۹. $f'(x) = 1-x$ و از آنجا $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + c$ می‌شود.

۳۶۰. در هر نقطه دلخواه (x, y) از منحنی مطلوب، ضریب زاویه قائم

برابر $-\frac{1}{y}$ می‌شود، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{y'} \Rightarrow y \cdot y' = -x \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c;$$

$$x^2 + y^2 = 2c \quad (c > 0)$$

یعنی هر دایره به مرکز مبدا مختصات دارای خاصیت مورد نظر مسأله است.

۳۶۱. طبق فرض مسأله داریم:

$$y' = \frac{x-1}{y-2} \Rightarrow y'(y-2) = (x-1) \Rightarrow$$

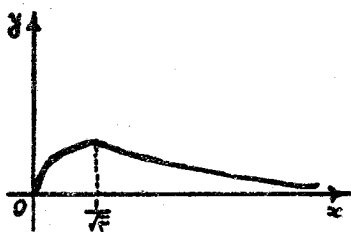
$$\Rightarrow \frac{1}{r}(y-2)^2 = \frac{1}{r}(x-1)^2 + c;$$

$$(y-2)^2 = (x-1)^2 + 2c \Rightarrow$$

$$y = 2 \pm \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 2c}$$

که با توجه به شرط مسأله $c = \frac{2}{3}$ بدست می آید.

منحنی تابع، هذلولی متساوی الساقینی است که مرکز آن $\omega(1, 2)$ می باشد.



شکل ۱۶۲

۳۶۲. منحنی نمایش تغییرات

تابع در شکل ۱۶۲ داده شده است،

برای محاسبه حجم مورد نظر، باید

تابع اولیه y^2 را حساب کنیم، داریم:

$$f(x) = y^2 = \frac{x}{(x^2+1)^2} = \\ = x(x^2+1)^{-2};$$

$$F(x) = -\frac{1}{r}(x^2+1)^{-1} = -\frac{1}{2(x^2+1)}$$

و بنابراین، اگر حجم مطلوب را V فرض کنیم داریم:

$$V = \pi \left| -\frac{1}{2(x^2+1)} \right|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{8} \quad (\text{واحد مکعب})$$

۳۶۳. رابطه مفروض را به صورت: $\frac{1}{r}x^{-3} - \frac{1}{r}x^{-5}$ می نویسیم

و از دو طرف این رابطه نسبت به x تابع اولیه می گیریم، بدست می آید:

$$\frac{1}{r}y^2 = -\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{8x^4} + c$$

چون منحنی تابع در نقطه به طول واحد بر محور طولها مماس است، باید به ازای

$x = 1$ برابر صفر شود، یعنی:

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{8}$$

و از آنجا:

$$y'^2 = \frac{(x^2 - 1)^2}{4x^4} \Rightarrow y' = \pm \frac{x^2 - 1}{2x^2} = \pm \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^{-2} \right)$$

دوباره نسبت به x تابع اولیه می‌گیریم:

$$y = \pm \frac{1}{2}x \pm \frac{1}{2x} + c$$

و چون باید تابع از نقطه $(0, 1)$ عبور کند، مقدار $c = \mp 1$ بدست می‌آید.

$$\text{جواب: } f(x) = -\frac{(x-1)^2}{2x} \text{ یا } f(x) = \frac{(x-1)^2}{2x}$$

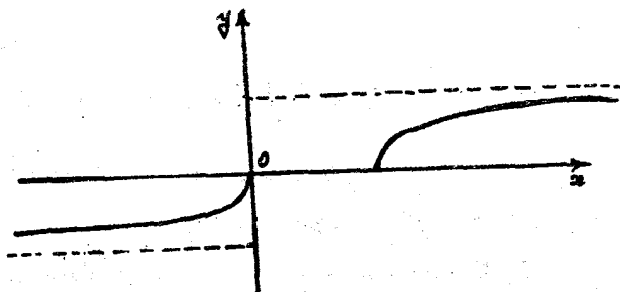
۳۶۴. معادله $y = 0$ جوابی درفاصله صفر و $\frac{\pi}{4}$ ندارد، بنابراین باید

تابع اولیه y را درفاصله صفر تا $\frac{\pi}{4}$ حساب کنیم.

جواب: $(4 - \pi) \frac{1}{8}$ واحد مربع.

۳۶۵. جواب: $\frac{2}{3}$ واحد مربع.

۳۶۶. اولاً منحنی نمایش تغییرات تابع در زیر داده شده است:



شکل ۱۶۳

ثانیاً حجم مطلوب از تابع اولیه πy^2 درفاصله ۲ تا ۳ بدست می‌آید.

جواب: $\frac{\pi}{2}$ واحد مکعب.

۳۶۷. حجم مطلوب، از تابع اولیه πy^2 در فاصله $2 -$ تا 1 بدست می آید

و داریم:

$$y^2 = f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x^2}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{(x^2 + x + 1)^2 - (2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} =$$

$$= 1 - (2x + 1)(x^2 + x + 1)^{-2}$$

واز آنجا:
$$F(x) = x + \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

جواب: 3π واحد مکعب.

۳۶۸. نقطه A بر محور xx' و ضمناً بر محور سهمی واقع است، بنابراین

کافی است سطح بین مماس AB و منحنی و محور xx' را پیدا کنیم، دو برابر این سطح، سطح مطلوبست. برای این منظور سطح بین منحنی و $B\omega$ و محور طول را پیدا می کنیم (ω محل تلاقی BC با محور طول است) و آنرا از سطح مثلث قائم الزویه $AB\omega$ کم می کنیم.

جواب: (S واحد مربع)
$$S = 2\sqrt{3}$$

برای محاسبه حجم مورد نظر باید مبداء مختصات را به نقطه $\omega(5, 0)$

(نقطه تلاقی BC با محور طول) منتقل کنیم تا دوران دور محور y ها انجام گیرد.

جواب: (V واحد مکعب)
$$V = \frac{42\sqrt{3}}{5}\pi$$

۳۶۹. x را بر حسب y محاسبه می کنیم:

$$x^2 - 2x + (3 - y) = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y - 2}$$

و چون باید شاخه ای از منحنی را که در ربع اول است در نظر بگیریم، داریم:

$$x = 1 + \sqrt{y - 2} \Rightarrow x^2 = y - 1 + 2\sqrt{y - 2}$$

تابع اولیه πx^2 را در فاصله $y = 3$ تا $y = 5$ محاسبه می کنیم، حجم مطلوب

بدست می‌آید.

جواب: $\frac{14+12\sqrt{3}}{3}\pi$ (واحد مکعب).

۰۳۷۰. جواب: 120π (واحد مکعب).

۰۳۷۱. جواب: $S_\lambda = \frac{\lambda-1}{2\lambda}$ و ضمناً: $S_\lambda = \frac{1}{2}$ $\xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty}$ $S = \frac{1}{2}$

۰۳۷۲. داریم: $y' = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ و از آنجا:

$$f(x) = \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{3}{x}\right);$$

و بنابراین طبق فرض مسأله ($\operatorname{tg} \alpha > 0$) داریم:

$$\frac{1}{6} \left| \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{3}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} + 2 \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

۰۳۷۳. جواب: $f(x) = -x^2 + x - \frac{1}{6}$

۰۳۷۴. رابطه مفروض بین تابع و مشتقهای اول و دوم آنرا، می‌توان چنین

نوشت:

$$2x + 2yy'y'' + y'^2y'' = 0 \Rightarrow 2x + (y'y'')' = 0$$

و از آنجا، اگر از دو طرف تابع اولیه بگیریم، بدست می‌آید:

$$x^2 + y'y'^2 = c$$

ضریب زاویه مماس در نقطه $A(2, 1)$ بر منحنی برابر است با ۳- . بنابراین

در رابطه اخیر باید مقادیر $x=2$ ، $y=1$ و $y'=-3$ صدق کنند که از آنجا

$c=۱$ بدست می آید:

$$x^2 + y'^2 = 1$$

دوباره، ازدوطرف تابع اولیه می گیریم:

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 = x + c_1$$

باقراردادن $x=2, y=1$ ، مقدار $c_1=1$ بدست می آید و تابع مطلوب چنین می شود:

$$y = -\sqrt[3]{x^3 - 3x - 3}$$

۳۷۵. تابع اولیه را به صورت $Y = \frac{mx+n}{x^2+a}$ در نظر بگیرید، در این صورت

باید تساوی $Y' = y$ برقرار باشد.

$$Y = \frac{-x}{x^2+a^2} + c \quad \text{جواب:}$$

۳۷۶. تابع مفروض را می توان به سادگی به این صورت تبدیل کرد:

$$y = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + 1$$

$$Y = \ln \frac{(x-1)^2}{x+1} + \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} + c \quad \text{جواب:}$$

۳۷۷. تابع را به این صورت بنویسید:

$$y = \frac{\sqrt[3]{2x - 5x^2} - x^2}{x^2 \sqrt[3]{2 - 5x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^6}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2 - 5x}} =$$

$$= x^{-\frac{6}{3}} - (2 - 5x)^{-\frac{1}{3}}$$

$$Y = \frac{3\sqrt[3]{(2x - 5x^2)^2} - 15}{10\sqrt[3]{x^7}} + c \quad \text{جواب:}$$

$$Y = -\frac{1}{x} \sqrt[3]{2x+3} + c \quad \text{جواب: ۳۷۸}$$

۳۷۹. کسر مفروض را به دو کسر ساده تر تبدیل می کنیم:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{5x^2 + 8x + 14}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{5x^2 + 8x + 14}{(x-1)^2(x+2)^2} = \\
 &= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \\
 &= \frac{(A+B)x^2 + 2(2A-B)x + (4A+B)}{(x^2 + x - 2)^2}
 \end{aligned}$$

در نتیجه، برای محاسبه مقادیر A و B ، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$A + B = 5, 2A - B = 4, 4A + B = 14$$

این دستگاه متوافق است و جواب $A = 3, B = 2$ را قبول دارد؛ بنابراین داریم:

$$y = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x+2)^2} = 3(x-1)^{-2} + 2(x+2)^{-2}$$

و دیگر بسادگی می‌توان تابعهای اولیه آنرا بدست آورد.

$$Y = -\frac{5x+4}{x^2+x-2} + c \quad \text{جواب:}$$

$$380. \quad Y = \frac{ax+b}{x^2+2} + c \quad \text{فرض} \quad \text{تابعهای اولیه این تابع را به صورت}$$

می‌کنیم، در این صورت:

$$Y' = \frac{a(x^2+2) - 2x^2(ax+b)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2ax^2 - 2bx^2 + 2a}{(x^2+2)^2}$$

و چون $Y' = y$ ، بنابراین باید داشته باشیم:

$$-2a = 1, -2b = 0, 2a = -1$$

که از آنجا $a = -\frac{1}{2}$ و $b = 0$ بدست می‌آید.

$$Y = \frac{-x}{2(x^2+2)} + c \quad \text{جواب:}$$

381. اگر فرض کنیم: $u = 1 - \sqrt{x}$ ، بدست می‌آید:

$$u' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

وتابع مفروض چنین می‌شود: $y = -2u'u^{\frac{1}{2}}$

$$Y = -\frac{4}{3}(1 - \sqrt{x})\sqrt{1 - \sqrt{x}} + c \quad \text{جواب:}$$

$$Y = -\frac{5}{4}(4 - \sqrt{x^2})\sqrt{4 - \sqrt{x^2}} + c \quad \text{جواب: ۳۸۲}$$

جواب: ۳۸۳

$$f(x) = -x^2 + x + \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad f(x) = x^2 + x - \frac{3}{4}$$

۳۸۴. ضریب زاویه مماس در نقطه (x, y) مساوی y' و ضریب زاویه

قائم در همین نقطه مساوی $-\frac{1}{y'}$ و معادله قائم در این نقطه،

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

است. نقطه تلاقی قائم با محور طول $(y'y + x, 0)$ و بنابراین تحت قائم منحنی

تابع، نسبت به محور طول، مساوی $y'y$ می‌شود، که بنا بر شرط مسأله باید مقداری ثابت باشد:

$$y'y = c \Rightarrow \frac{1}{y}y' = cx + d \Rightarrow y' = 2cx + 2d$$

و این معادله يك سهمی است که محور آن بر محور طول منطبق است.

در حالتی که تحت قائم را نسبت به محور عرض پیدا کنیم، به عنوان جواب

سهمی‌هایی بدست می‌آید که محور آنها بر محور عرض منطبق باشد.

$$R(1, \frac{1}{8}) \quad \text{۳۸۵ می‌شود:}$$

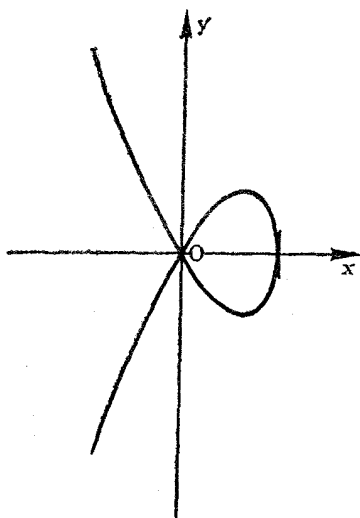
$$S_m = \frac{3m^2 - 2m - 1}{8(m+1)^2} \quad (a)$$

$$V_m = \frac{\pi}{60} - \frac{(10m^2 + 5m + 1)\pi}{30(m+1)^5} \quad (b)$$

$$V = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m = \frac{\pi}{60}; S = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \frac{3}{8} \quad (c)$$

۳۸۶. (a) منحنی تابع $y = x\sqrt{2-x}$ را رسم کنید، قرینه آن نسبت به

محور طول، منحنی تابع $y = -x\sqrt{2-x}$ خواهد بود (شکل ۱۶۴).



شکل ۱۶۴

نقطه $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}})$ ماکزیم

منحنی تابع $y = x\sqrt{2-x}$ است.

این منحنی در نقطه $(2, 0)$ مماس قائم دارد.

(b) مساحت بین منحنی تابع

$y = x\sqrt{2-x}$ و محور طول را

(درفاصله صفر تا ۲) پیدا کنید، سطح

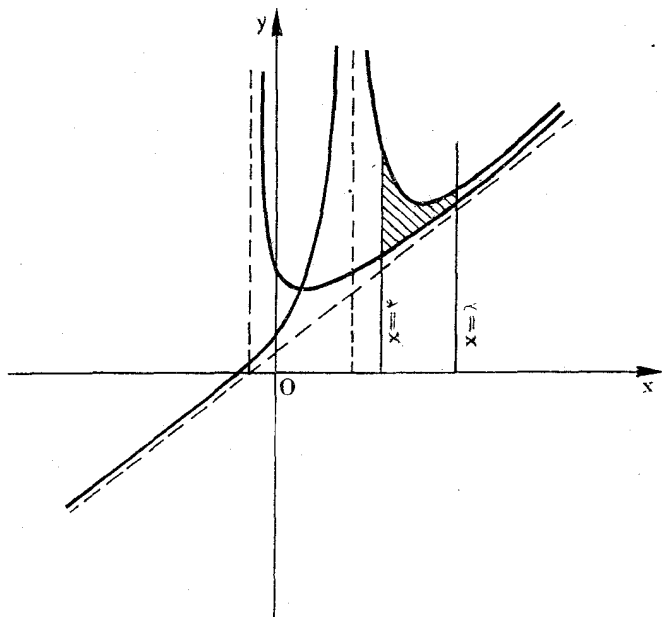
مطلوب دوبرابر آن خواهد بود.

$$\text{جواب: } S = \frac{32}{15}\sqrt{2}$$

۳۸۷. (a) منحنی نمایش تغییرات دوتابع در شکل ۱۶۵ رسم شده است.

$$S_\lambda = \frac{16}{15} - \frac{16}{(\lambda+1)(\lambda-3)} \quad \text{جواب: (b)}$$

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda = \frac{16}{15} \quad (c)$$



شکل ۱۶۵

۳۸۸. اگر $f(x)$ ، چند جمله‌ای صحیحی از درجه n باشد، $f'(x)$ از درجه $n-1$ و $F(x)$ از درجه $n+1$ و بنابراین $F[f'(x)]$ از درجه n^2-1 خواهد شد. به این ترتیب روشن می‌شود که $f(x)$ ، درمسأله‌ما، از درجه دوم است:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

اگر مقدار ثابت را در $F(x)$ مساوی d بگیریم، در چند جمله‌ای $F[f'(x)]$ ضریبها چنین می‌شوند:

$$x^2 \text{ ضریب} = \frac{1}{3}a^3$$

$$x^1 \text{ ضریب} = 2a^2b(2a+1)$$

$$x \text{ ضریب} = 2a(ab^2 + b^2 + c)$$

$$\text{مقدار ثابت} = \frac{1}{3}ab^2 + \frac{1}{2}b^2 + bc + d$$

اگر این ضریبها را، با ضریبهای $F[f'(x)]$ ، در فرض مسأله، مساوی قرار دهیم، به دو دسته جواب می‌رسیم:

$$۱) a=3, b=-2, c=1, d=0$$

$$۲) a=-3, b=\frac{14}{5}, c=-\frac{33}{25}, d=\frac{84}{125}$$

بنابراین، چند جمله‌ای $f(x)$ ، یکی از دو صورت زیر است:

$$(۱) f(x) = 3x^2 - 2x + 1,$$

$$(۲) f(x) = -3x^2 + \frac{14}{5}x - \frac{33}{25}$$

منتهی برای اینکه، این تابعها در شرطهای مسأله، صدق کنند، باید در تابع اولیه

حالت (۱)، مقدار ثابت را مساوی صفر و در حالت (۲) مساوی $\frac{84}{125}$ گرفت.

منحنی‌های درجه دوم (مقاطع مخروطی)

۳۸۹. معادله سهمی را به این صورت می‌نویسیم:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a})$$

از اینجا معلوم می‌شود که محور سهمی، موازی محور عرض است، رأس آن

$S(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ و پارامتر آن $p = \frac{1}{2a}$ است (اگر منظور از

پارامتر سهمی، فاصله کانون تا خط هادی، باشد، باید نوشت $p = |\frac{1}{2a}|$).

کانون سهمی، روی محور آن و به فاصله $|\frac{p}{2}|$ از آنست. بنابراین بسادگی بدست

می‌آید.

$$x_F = x_S = -\frac{b}{2a}, \quad y_F = y_S + \frac{p}{2} = \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}$$

و بنابراین داریم:

$$F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$$

معادله خط هادی سهمی هم بسادگی بدست می‌آید:

$$y = \frac{1}{4a}(4ac - b^2 - 1)$$

۳۹۰. a) معادله $y = \frac{x+1}{x-1}$ ، نسبت به y و x ، از درجه دوم و بنابراین

یک مقطع مخروطی است؛ ولی این مقطع مخروطی دارای دو مجانب عمود بر هم است، در نتیجه، منحنی آن یک هذلولی متساوی الساقین می‌شود (چون مجانبها بر هم عمودند؛ مستطیل مجانبها، تبدیل به مربع می‌شود و بنابراین بدست می‌آید: $a=b$).

b) مجانبهای هذلولی بسادگی بدست می‌آید: $x=1$ و $y=1$. نقطه

برخورد مجانبها، مرکز هذلولی است: $\omega(1,1)$. محوره‌های هذلولی، نیمسازهای زاویه‌های مجانبهای آنست و بنابراین معادله آنها بسادگی بدست می‌آید:

محور قاطع: $y=x$

محور غیر قاطع: $x+y=2$

رأسهای هذلولی، از برخورد محور قاطع، با منحنی آن بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y = \frac{x+1}{x-1} \\ y = x \end{cases} \Rightarrow A \begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}, A' \begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

از طرف دیگر:

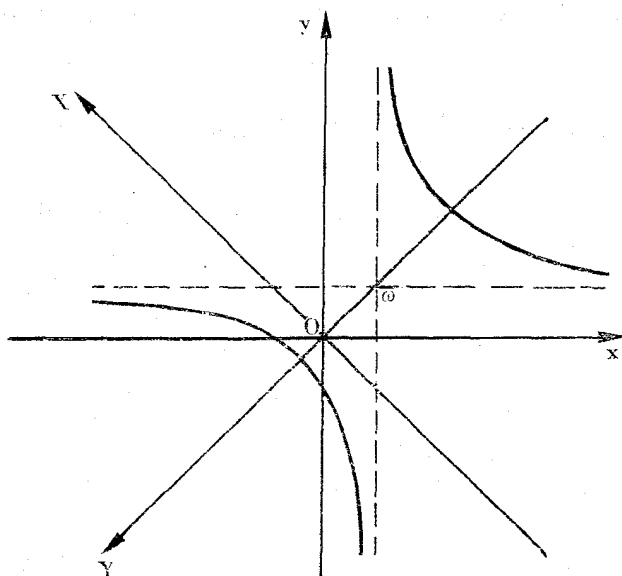
$$\begin{aligned} 2a = 2b = AA' &= \sqrt{2[(1 + \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2})]^2} = 4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = b = 2 \end{aligned}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$$

کانون، روی محور قاطع هذلولی است $(y = x)$ ، اگر $F(\alpha, \alpha)$ بگیریم، باید $\omega F = c$ باشد:

$$\omega F^2 = 2(\alpha - 1)^2 \Rightarrow 2(\alpha - 1)^2 = 8 \Rightarrow \alpha = -1, 3$$

و بنابراین: $F'(-1, -1)$ و $F(3, 3)$



شکل ۱۶۶

توضیح. هذلولی بودن منحنی تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ را باروش تحلیلی هم

می‌توان ثابت کرد. اگر منحنی این تابع، يك هذلولی باشد، مختصات کانونهای آن همانست که بدست آوردیم، دراینصورت باید قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه

دلخواه از منحنی تا این دو نقطه، مساوی مقداری ثابت باشد ($2a=4$).

نقطه دلخواه $M(x, \frac{x+1}{x-1})$ را روی منحنی تابع انتخاب می‌کنیم، بسادگی

بدست می‌آید:

$$MF^2 = \left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x-1} \right)^2, MF'^2 = \left(\frac{x^2 + 1}{x-1} \right)^2;$$

$$MF = \frac{x^2 - 4x + 5}{|x-1|}, MF' = \frac{x^2 + 1}{|x-1|}$$

(عبارتهای $x^2 + 1$ و $x^2 - 4x + 5$ ، به ازای همه مقادیر حقیقی x ، مثبت هستند).
از آنجا:

$$MF' - MF = \frac{4(x-1)}{|x-1|} \Rightarrow |MF' - MF| = 4$$

(c) نقطه دلخواه $K(\alpha, \beta)$ را در نظر می‌گیریم، خطی با ضریب زاویه

مساوی m از این نقطه می‌گذرانیم، معادله این خط به صورت

$$y = mx + \beta - m\alpha$$

خواهد بود. اگر بخواهیم چنین خطی بر هذلولی $y = \frac{x+1}{x-1}$ مماس باشد، باید

از حل معادله خط با معادله منحنی، به معادله‌ای بایک ریشه مضاعف برسیم:

$$mx^2 - [(\alpha+1)m - (\beta-1)]x + \alpha m - \beta - 1 = 0$$

$$\Delta = (\alpha-1)^2 m^2 - 2[(\alpha+1)(\beta-1) - 2(\beta+1)]m + (\beta-1)^2 = 0$$

درجه دوم بودن این معادله، نسبت به m ، به معنای آنست که معمولاً از نقطه K ،

دو مماس می‌توان بر هذلولی رسم کرد، که ضریب زاویه‌های آنها جوابهای این معادله‌اند. برای اینکه این دو مماس برهم عمود باشند، باید حاصلضرب این دو

ضریب زاویه مساوی -1 شود، که از آنجا به رابطه زیر بین α و β می‌رسیم:

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 = 0$$

و این معادله دایره‌ای است به مرکز $\omega(1, 1)$ و شعاع مساوی صفر؛ یعنی تنها از مرکز این هذلولی، می‌توان دو مماس عمود برهم بر آن رسم کرد، این مماسها همان مجانبهای هذلولی‌اند و بنابراین نقطه‌های تماس به بی‌نهایت می‌روند.

(d) دو هذلولی مزدوج مجانبهای مشترک دارند و بنابراین، معادله هذلولی

مزدوج باید به صورت $y = \frac{x + \lambda}{x - 1}$ باشد. از طرف دیگر، شاخه‌های يك هذلولی

متساوی‌الساقین با شاخه‌های هذلولی مزدوج آن، نسبت به مجانبها، قرینه یکدیگرند،

بنابراین باید هذلولی مزدوج از نقطه $(3, 0)$ بگذرد (قرینه نقطه $(-1, 0)$)

نسبت به مجانب $x = 1$). از اینجا $\lambda = -3$ بدست می‌آید و معادله هذلولی

$$\text{مزدوج } y = \frac{x - 3}{x - 1} \text{ می‌شود.}$$

(e) وقتی که محورهای مختصات را به اندازه $\frac{3\pi}{4}$ ، در جهت مثلثاتی، دوران

دهیم، محور جدید OX بر امتداد نیم‌ساز ربع دوم و چهارم، و محور جدید OY

بر امتداد نیم‌ساز ربع اول و سوم منطبق می‌شود. در حقیقت، در دستگاه محورهای

مختصات جدید، محور قاطع هذلولی بر محور عرض منطبق می‌شود و بنابراین

معادله آن، به اینصورت است (صفحه ۱۷۷ را ببینید):

$$\frac{(y - \beta)^2}{a^2} - \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1$$

که معرف فاصله‌اند، در دستگاه قدیم و جدید یکی است: $a = b = 2$ ، $\beta = \alpha$ ،

مختصات مرکز هذلولی در دستگاه جدید است. مرکز هذلولی روی محور عرض

دستگاه جدید قرار دارد، بنابراین: $\alpha = 0$. مقدار β ، عددی منفی و برابر است

با $-\sqrt{2}$. در نتیجه، معادله هذلولی، در دستگاه محورهای جدید، چنین

می‌شود:

$$\frac{(y + \sqrt{2})^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1 \Rightarrow y = -\sqrt{2} \pm \sqrt{x^2 + 4}$$

۳۹۱. a) ساده‌ترین معادلهٔ مقطع مخروطی (یا معادلهٔ کانونی آن)، در بحث مربوط به مقطعهای مخروطی (از صفحهٔ ۱۷۱ به بعد)، روشن شده است. ساده‌ترین معادلهٔ بیضی، هذلولی و سهمی را می‌توان به صورت کلی:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + D = 0 \quad (۱)$$

نشان داد، زیرا:

(۱) برای $A = B = 1$ ، $C = 0$ ، $D = -r^2$ ، معادلهٔ (۱) به این صورت در می‌آید:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (۲)$$

که معادلهٔ يك دایره است.

(۲) برای $A = \frac{1}{a^2}$ ، $B = \frac{1}{b^2}$ ، $C = 0$ ، $D = -1$ ، معادلهٔ (۱) به

صورت:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (۳)$$

در می‌آید که معادلهٔ يك بیضی است.

(۳) برای $A = \frac{1}{a^2}$ ، $B = -\frac{1}{b^2}$ ، $C = 0$ ، $D = -1$ ، معادلهٔ

(۱) به صورت:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (۴)$$

در می‌آید، که معادلهٔ يك هذلولی است.

(۴) برای $A = 0$ ، $B = 1$ ، $C = -2p$ ، $D = 0$ ، معادلهٔ (۱)

به صورت:

$$y^2 = 2px \quad (۵)$$

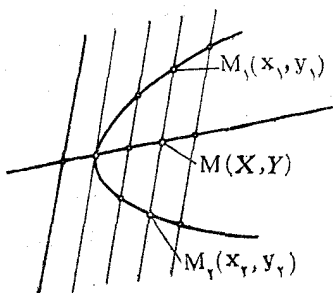
در می‌آید، که معادلهٔ يك سهمی است.

b) معادلهٔ درجه دوم (۱) و خط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y = kx + b \quad (۶)$$

از حل این دو معادله با هم، نقطه‌های برخورد آنها بدست می‌آید: $M_1(x_1, y_1)$

و $M_2(x_2, y_2)$. این دو نقطه ممکن است حقیقی و متمایز، حقیقی و منطبق



شکل ۱۶۷

برهم یا موهومی باشند (در حالت موهومی بودن نقطه‌ها، طولهای M_1 و M_2 و همچنین عرضهای M_1 و M_2 مزدوج یکدیگرند). پاره خط M_1M_2 را وتر گویند، که دو انتهای آن ممکن است حقیقی یا موهومی باشد.

در هر سه حالت، عددهای X و Y

که از تساویهای:

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, Y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (۷)$$

بدست می‌آید، حقیقی‌اند و نقطه $M(X, Y)$ ، يك نقطه حقیقی از خط (۶) است (شکل ۱۶۷).

حالا همه خطهای موازی خط (۶) را در نظر می‌گیریم، و مکان هندسی نقطه‌های $M(X, Y)$ ، که از تساویهای (۷) بدست می‌آید، معین می‌کنیم. این مکان، یکی از قطرهای منحنی (۱) خواهد بود.

مختصات دو نقطه $M_1(x_1, y_1)$ و $M_2(x_2, y_2)$ در معادله (۱) صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} Ax_1^2 + By_1^2 + Cx_1 + D = 0 \\ Ax_2^2 + By_2^2 + Cx_2 + D = 0 \end{cases}$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$A(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + B(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) + C(x_2 - x_1) = 0 \quad (۸)$$

اگر $x_2 - x_1 \neq 0$ باشد، این تساوی چنین می‌شود:

$$A \frac{x_2 + x_1}{2} + B \frac{y_2 + y_1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{C}{2} = 0 \quad (۸')$$

در این تساوی $\frac{y_2 + y_1}{2} = Y$ و $\frac{x_2 + x_1}{2} = X$ مختصات نقطه M ، و

ضریب زاویه خط (۶) است. معادله (۸') به اینصورت در می آید:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$

$$AX + BkY + \frac{C}{r} = 0 \quad (9)$$

از معادله (۹)، معلوم می شود که قطر منحنی درجه دوم به معادله (۱)، يك خط راست است. قطر (۹) را مزدوج وترهای با ضریب زاویه k ، گویند.

اگر $x_2 - x_1 = 0$ باشد (و این وضع وقتی پیش می آید که وترها موازی محور Oy باشند)، $y_2 - y_1 \neq 0$ می شود و از معادله (۸) نتیجه می شود که:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 0 \implies Y = 0$$

یعنی قطر منحنی، منطبق بر محور Ox است. به کمک معادله (۹) می توان، معادله قطرهای دایره، بیضی، هذلولی و بیضی را، وقتی که معادله آنها به صورت کانونی باشد، بدست آورد.

۱) در حالتی که معادله (۱)، يك دایره باشد، معادله قطر (۹) به اینصورت در می آید:

$$X + kY = 0 \quad (10)$$

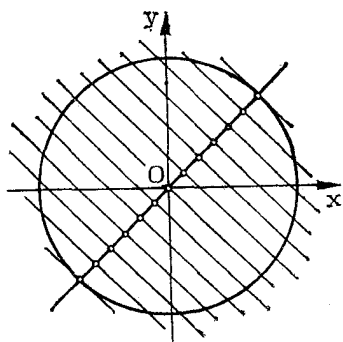
$$Y = -\frac{1}{k}X \quad (10')$$

و یا:

ضریب زاویه این قطر: $k' = -\frac{1}{k}$. به این ترتیب، هر قطر دایره بر وترهای

مزدوج خودش عمود است (شکل ۱۶۸). همچنین از معادله (۱۰) معلوم می شود که به ازای هر مقدار k ، قطر دایره از مبدأ مختصات (یعنی مرکز دایره) عبور می کند.

۲) در حالت بیضی، معادله قطر به اینصورت در می آید:



شکل ۱۶۸

$$\frac{X}{a^2} + k \frac{Y}{b^2} = 0 \quad (11)$$

از معادله (۱۱) معلوم می‌شود، که قطری بیضی از مبدأ مختصات (یعنی مرکز بیضی) عبور می‌کند. اگر این معادله را، نسبت به Y ، حل کنیم، چنین می‌شود:

$$Y = -\frac{b^2}{a^2 k} X$$

یعنی ضریب زاویه آن $k' = -\frac{b^2}{a^2 k}$ می‌شود و از آنجا:

$$k \cdot k' = -\frac{b^2}{a^2} \quad (12)$$

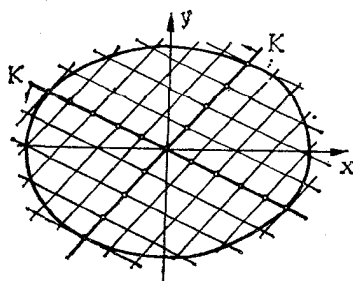
رابطه (۱۲) نسبت به k و k' متقارن است، یعنی اگر وترهای با ضریب زاویه

k' را در نظر بگیریم، قطر مزدوج آنها به ضریب زاویه مساوی k خواهد شد.

دوقطری که ضریب زاویه‌های آنها در رابطه (۱۲) صدق کنند، قطرهای

مزدوج نامیده می‌شوند. هر یک از قطرهای مزدوج، وترهای موازی دیگری را نصف می‌کند (شکل ۱۶۹).

از تساوی (۱۲) معلوم می‌شود که اگر k مثبت باشد، k' منفی است و بنابراین،



شکل ۱۶۹

اگر قطری از ربع‌های اول و سوم بگذرد، مزدوج آن از ربع‌های دوم و چهارم عبور خواهد کرد.

اگر k بزرگ شود، یعنی قطری در جهت مثلثاتی دوران کند، از تساوی (۱۲) معلوم می‌شود که k' از لحاظ قدر مطلق، کوچک می‌شود و چون

k' منفی است، قطر مزدوج هم درجهت مثلثاتی حرکت می کند: قطرهای مزدوج نمی توانند برهم منطبق شوند، زیرا اگر $k = k'$ باشد، باید داشته باشیم:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{b^2}{a^2}}$$

اگر $k \rightarrow 0$ ، در اینصورت $|k'| \rightarrow \infty$. در اینصورت قطرهای مزدوج بر محورهای بیضی منطبق و برهم عمود می شوند.

(۳) معادله قطر هذلولی به اینصورت درمی آید:

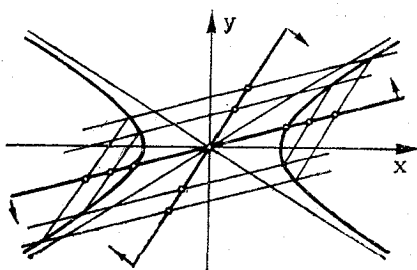
$$\frac{X}{a^2} - k \frac{Y}{b^2} = 0 \quad (۱۳)$$

از این معادله، معلوم می شود که قطر هذلولی، از مبدا مختصات (یعنی مرکز هذلولی)،

می گذرد. ضریب زاویه این قطر $k' = \frac{b^2}{a^2 k}$ ، و از آنجا:

$$k \cdot k' = \frac{b^2}{a^2} \quad (۱۴)$$

این تساوی، نسبت به k و k' متقارن است. بنابراین قطر با ضریب زاویه k ، مزدوج وترهای با ضریب زاویه k' است و برعکس دو قطری که ضریب زاویه های



شکل ۱۷۰

آنها، در رابطه (۱۴) صدق کند، مزدوج هم نامیده می شوند، هر کدام از این دو قطر، وترهای موازی دیگری را نصف می کند. همچنین از رابطه (۱۴) معلوم می شود که k و k' هم علامت اند، یعنی هر دو از یک ربع عبور می کنند؛ ضمناً اگر

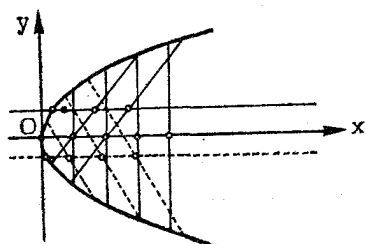
k بزرگ شود، k' کوچک می‌شود، یعنی اگر یکی از قطرهای درجهت مثلثاتی دوران کند، دیگری در خلاف جهت مثلثاتی دوران خواهد کرد (شکل ۱۷۰). در حالت هذلولی، دو قطر مزدوج می‌توانند برهم منطبق شوند، اگر $k = k'$ باشد،

$$k_{1,2} = \pm \frac{b}{a} \quad \text{بدست می‌آید. در این وضع قطرهای هذلولی: } Y = \frac{b}{a}X \text{ و}$$

$Y = -\frac{b}{a}X$ برمجانبه‌های هذلولی منطبق می‌شود. بنابراین هر یک از میجانبه‌های هذلولی را می‌توان مثل دو قطر مزدوج آن در نظر گرفت. اگر $k \rightarrow 0$ ، در این صورت $k' \rightarrow \infty$. در این حالت دو قطر مزدوج عمود برهم بدست می‌آید که برمحورهای هذلولی منطبق‌اند.

(۴) در حالت سهمی، معادله قطر به این صورت درمی‌آید:

$$kY - p = 0 \Rightarrow Y = \frac{p}{k} \quad (۱۵)$$



شکل ۱۷۱

از این معادله نتیجه می‌شود که همه قطرهای سهمی، موازی بامحور Ox هستند. اگر $k \rightarrow \infty$ ، قطر مزدوج وترهای نظیر آن، برمحور Ox منطبق می‌شود. به این ترتیب تمام قطرهای سهمی، موازی بامحور آن هستند (شکل ۱۷۱).

مثال ۱. دو قطر مزدوج، از بیضی $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ را پیدا کنید. که یکی

از آنها از نقطه $(4, 2)$ عبور کند.

حل. چون قطرهای این بیضی، از مبدا مختصات عبور می‌کنند، معادله آنها

به صورت $y = kx$ است. چون یکی از قطرهای از نقطه $(4, 2)$ عبور می‌کند، $2 = 4k$ ،

و از آنجا $k = \frac{1}{4}$ بدست می‌آید؛ از طرف دیگر بین ضریب زاویه‌های دو قطر مزدوج

بیضی، رابطه $kk' = -\frac{b^2}{a^2}$ برقرار است، و چون در اینجا $a^2 = 4$ و $b^2 = 8$

است، $k' = -1$ بدست می‌آید. بنابراین، معادله دو قطر مزدوج مطلوب چنین می‌شود:

$$y = \frac{1}{4}x, y = -x$$

مثال ۲. سهمی $y^2 = -8x$ مفروض است. از نقطه $(-1, 1)$ وتری

عبور دهید که در همین نقطه، نصف شود.

حل. معادله و تر مورد نظر را به این صورت می‌نویسیم:

$$y - 1 = k(x + 1)$$

معادله قطر مزدوج این و ترها، $Y = \frac{P}{k} = -\frac{4}{k}$ است؛ این قطر باید از وسط

وترهای مربوطه عبور کند، یعنی مختصات نقطه $(-1, 1)$ در آن صدق می‌کند:

$$1 = -\frac{4}{k} \Rightarrow k = -4$$

و از آنجا معادله و تر مورد نظر چنین می‌شود:

$$4x + y + 3 = 0$$

۳۹۲. اگر $y = m_1x$ و $y = m_2x$ را دو قطر مزدوج بیضی اول بگیریم،

داریم: $m_1m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ (مسأله ۳۹۱ را ببینید). قطر اول، بیضی دوم را در

نقطه (x_1, y_1) قطع می‌کند. ضریب زاویه k مماس در این نقطه، به سادگی بدست می‌آید:

$$k_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} = -\frac{b^2}{a^2 m_1}$$

وبهمن ترتیب معلوم می‌شود: $k_y = -\frac{b^2}{a^2 m_y}$. بنابراین:

$$k_1 \cdot k_y = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{m_1 m_y} = -1$$

یعنی مماسهای بریضی دوم برهم عمودند.

۳۹۳. خط $y = k(x - c)$ ، مماسهای $x = -a$ و $x = a$ بر رأسهای

هذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ را در نقطه‌های $P(a, k(a - c))$ و

$Q(-a, -k(a + c))$ قطع می‌کند ($c^2 = a^2 + b^2$). بنابراین نقطه

$E(0, -kc)$ ، مرکز دایره به قطر PQ خواهد بود و معادله این دایره چنین می‌شود:

$$x^2 + (y + kc)^2 = (1 + k^2)a^2$$

اگرین این معادله و معادله هذلولی، x^2 را حذف کنیم، بدست می‌آید:

$$(cy + b^2 k)^2 = 0$$

بنابراین دایره بر هذلولی، در دو نقطه قرینه هم، نسبت به محور Oy ، برهم مماس‌اند.

۳۹۴. N, K, L را سه رأس متوالی از لوزی $KLMN$ می‌گیریم،

متذکر می‌شویم که اگر رأس K ، واقع بر ضلع BC را ثابت فرض کنیم؛ رأس

M ، روی پاره خط $M_1 M_2$ قرار می‌گیرد که موازی با AB و به فاصله $x = kc$

از آنست (شکل ۱۷۲ - a). جای دواتهای M_1 و M_2 ، این پاره خط را معین

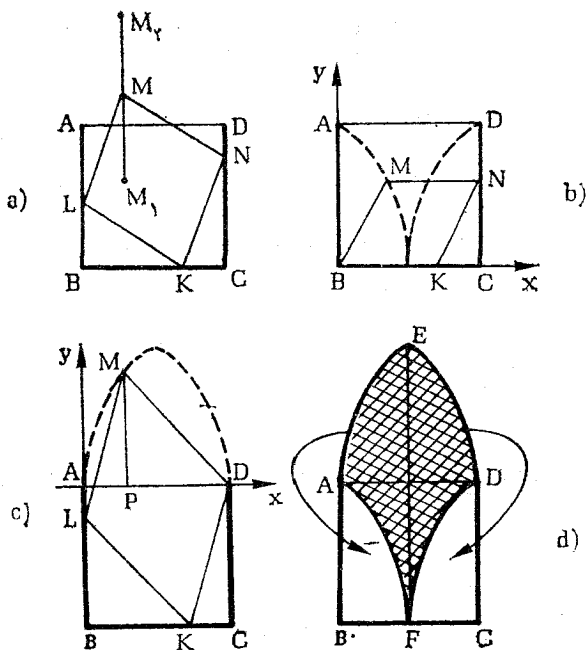
می‌کنیم.

$x < \frac{1}{p}$ می‌گیریم (در حالت $x > \frac{1}{p}$ ، جای نقطه M ، به قرینه خود

نسبت به محور مربع منتقل می‌شود). روشن است که پائین‌ترین وضع نقطه M

وقتی بدست می‌آید که رأس L از لوزی، روی رأس B از مربع قرار گرفته باشد

(شکل ۱۷۲ - b). در این صورت:



شکل ۱۷۲

$$KC = x ; NK = BK = 1 - x ;$$

$$NC = \sqrt{(1-x)^2 - x^2} = \sqrt{1-2x}$$

به این ترتیب، نقطه M_1 روی یک سهمی قرار گرفته است، که معادله آن در دستگاه
مختصات مختصاتی که روی شکل ۱۷۲، b نشان داده شده است، چنین است:

$$y = \sqrt{1-2x} \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$$

بالا ترین وضع نقطه M_1 ، وقتی است که نقطه N بر D منطبق باشد (شکل ۱۷۲)
(c-). عمود M_1P را بر AD فرود می آوریم، در این صورت:

$$KC = x ; LK = KN = \sqrt{1+x^2} ;$$

$$MP = LB = \sqrt{1+x^2 - (1-x)^2} = \sqrt{2x}$$

به این ترتیب، نقطهٔ M_4 بر سهمی قرار دارد، که معادلهٔ آن در دستگاه محورهای مختصاتی که روی شکل ۱۷۲- c نشان داده شده است، چنین است:

$$y = \sqrt{2x} \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$$

بنابراین مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های M ، شکلی به وجود می‌آورد که از چهار کمان مشابه سهمی درست شده است (شکل ۱۷۲- d). اگر این شکل را، روی پاره خط AD و روی محور تقارن EF ببریم، چهار قطعه بدست می‌آید، که می‌توان به کمک آنها، مربعی مساوی مربع $ABCD$ ساخت. در نتیجه مساحت مورد نظر برابر است با واحد.

۱۰۳۹۵) هذلولی

متساوی الساقین γ ، به

$$\text{معادلهٔ } y = \frac{k}{x} \text{ را در}$$

نظر می‌گیریم (شکل

۱۷۳). اگر $P(a, \frac{k}{a})$

را روی هذلولی اختیار

کنیم، معادلهٔ دایرهٔ به

مرکز P و شعاع مساوی

OP چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y - \frac{k}{a})^2 &= \\ &= 4(a^2 + \frac{k^2}{a^2}) \end{aligned}$$

شکل ۱۷۳

برای پیدا کردن مختصات نقطه‌های P_1, P_2, P_3, P_4 ، برخورد هذلولی و دایره، باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ (x-a)^2 + (y - \frac{k}{a})^2 = 4(a^2 + \frac{k^2}{a^2}) \end{cases}$$

با حذف y ، بین این دو معادله، به معادله زیر می‌رسیم:

$$a^2 x^4 - 2a^2 x^2 - 3(a^4 + k')x^2 - 2k'ax + k'a^2 = 0$$

روشن است که $x = -a$ ، یکی از ریشه‌های این معادله است. با توجه به رابطه مربوط به مجموع ریشه‌ها داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3a$$

از اینجا برای نقطه $G(x_0, y_0)$ ، مرکز ثقل مثلث $P_1 P_2 P_3$ ، بدست می‌آید:

$$y_0 = \frac{k}{a}, x_0 = a$$

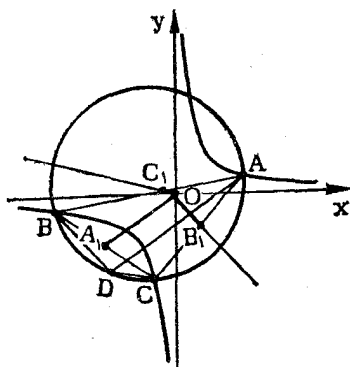
به این ترتیب مرکز ثقل مثلث $P_1 P_2 P_3$ بر نقطه P ، مرکز

دایره محیطی مثلث، منطبق می‌شود و این به معنای آنست که مثلث $P_1 P_2 P_3$ متساوی‌الاضلاع است.

(۲) برای ساختن مثلث متساوی‌الاضلاعی که رأس A از آن، روی هذلولی معلوم باشد، باید روی هذلولی نقطه P را چنان پیدا کرد که $PA = 2PO$ باشد. مکان هندسی نقطه‌هایی را رسم می‌کنیم که نسبت فاصله‌های هر یک از آنها تا نقطه‌های A و O مساوی $2:1$ باشد. این مکان دایره‌ای به قطر $K_1 K_2$ است (دایره آپولون)، که در آن K_1 و K_2 عبارتند از نقطه‌هایی واقع بر پاره خط OA یا امتداد آن، بنحوی که OA را به نسبت $2:1$ تقسیم کنند. نقطه برخورد این دایره با هذلولی، همان نقطه P است.

حالا اگر دایره‌ای به مرکز

و شعاع مساوی $2OP$ رسم کنیم، هذلولی را در چهار نقطه قطع می‌کند، که سه تا از آنها، رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. تعداد جوابهای مسأله به تعداد نقطه‌های برخورد دایره آپولون با هذلولی است.



شکل ۱۷۴

$$y = \frac{1}{x} \text{ روی هذلولی}$$

سه نقطه $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۷۴). قطری از هذلولی که از وسط وتر BC عبور کند، ضریب زاویه‌ای مساوی

$$\frac{y_2 + y_3}{x_2 + x_3} = \frac{1}{x_2 x_3}$$

خواهد داشت (حل مسئله ۳۹۱ را ببینید). بنابراین معادله

خطی که از نقطه A ، موازی این خط رسم شود، چنین است:

$$y = y_1 + \frac{1}{x_2 x_3} (x - x_1)$$

به همین ترتیب می‌توان، معادله دو خط دیگر را هم تشکیل داد:

$$y = y_2 + \frac{1}{x_1 x_3} (x - x_2)$$

$$y = y_3 + \frac{1}{x_1 x_2} (x - x_3)$$

بسادگی می‌توان تحقیق کرد که این سه خط در یک نقطه D با این مختصات بهم می‌رسند:

$$x_0 = x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{و} \quad y_0 = y_1 + y_2 + y_3$$

حالا باید ثابت کنیم، نقطه D ، روی دایره‌ای است که از نقطه‌های A ، B و C می‌گذرد. داریم:

$$\widehat{tg(BDC)} = \frac{\frac{1}{x_2 x_3} - \frac{1}{x_2 x_1}}{1 + \frac{1}{x_1^2 x_2 x_3}}; \quad \widehat{tg(BAC)} = \frac{-\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_3 x_1}}{1 + \frac{1}{x_1^2 x_2 x_3}}$$

یعنی $\widehat{tg(BDC)} = \widehat{tg(BAC)}$ و نقطه‌های A ، B ، C و D روی یک

دایره‌اند.

۳۹۷. مرکز تقارن منحنی درجه دوم:

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \quad (۱)$$

را $\omega(\alpha, \beta)$ می‌گیریم. اگر این نقطه، مرکز تقارن منحنی باشد، باید پس از

انتقال مبدا مختصات به این نقطه، به معادله‌ای برسیم که با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ ، تغییر نکند. رابطه‌های انتقال محورها چنین است:

$$x = X + \alpha \quad \text{و} \quad y = Y + \beta$$

که اگر در معادله (۱) قرار دهیم، پس از ساده کردن چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} & aX' + bY' + cXY + (2a\alpha + c\beta + d)X + \\ & + (2b\beta + c\alpha + e)Y + (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\alpha\beta + d\alpha + e\beta + f) = 0 \end{aligned}$$

و در نتیجه β و α جواب دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} 2a\alpha + c\beta + d = 0 \\ 2b\beta + c\alpha + e = 0 \end{cases} \quad (2)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases} f'_x = 2ax + cy + d: & \text{مشتق } f(x,y) \text{ نسبت به } x \\ f'_y = 2by + cx + e: & \text{مشتق } f(x,y) \text{ نسبت به } y \end{cases}$$

از مقایسه دستگاه (۲) با مقادیر f'_x و f'_y ، معلوم می‌شود که برای پیدا کردن مرکز تقارن یک منحنی درجه دوم (در صورت وجود)، باید دستگاه زیر را حل کرد:

$$f'_x = 0, f'_y = 0$$

اکنون این روش را در مورد معادله

$$y = mx + n \pm \sqrt{px^2 + qx + r}$$

بکار می‌بریم. این معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$(y - mx - n)^2 = px^2 + qx + r$$

اگر از دو طرف، یکبار نسبت به متغیر x و یکبار نسبت به متغیر y مشتق بگیریم، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} -2m(y - mx - n) = 2px + q \\ 2(y - mx - n) = 0 \end{cases}$$

که از حل آن به جواب زیر (مختصات مرکز تقارن منحنی)، می‌رسیم:

$$x = -\frac{q}{2p} ; y = n - \frac{mq}{2p} \quad (p \neq 0)$$

۳۹۸. تحقیق ساده است.

۳۹۹. نتیجه بحث در این جدول داده شده است:

$a = 0$	$b = 0$	$c = 0$ دو خط منطبق بر هم $c > 0$ دو خط متوازی $c < 0$ موهومی
	$b \neq 0$	سهمی (محور این سهمی بر محور طول قرار دارد)
$a \neq 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$a < 0$ يك نقطه $a > 0$ دو خط متقاطع
	$b^2 - 4ac > 0$	$a < 0$ بیضی یا دایره $a > 0$ هذلولی
	$b^2 - 4ac < 0$	$a < 0$ موهومی $a > 0$ هذلولی

۴۰۰. به ازای مختصات هر نقطه (x, y) از صفحهٔ محورهای مختصات،

به معادلهٔ درجهٔ دوم نسبت به m می‌رسیم:

$$(x+4)m^2 - 8ym - (x-4) = 0$$

مبین این معادله: $\Delta = 4(x^2 + 16y^2 - 16)$ است. بنابراین برای مقادیری

از x و y که در معادله $x^2 + 16y^2 - 16 = 0$ یا $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$ (بیضی c)،

صدق کنند، تنها يك مقدار برای m بدست می آید. یعنی مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات، که از هر کدام آنها، تنها یکی از خطهای (d) می‌گذرد، عبارتست از بیضی c . بسادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر ناحیهٔ داخل بیضی را در نظر بگیریم، از آنها، هیچ خطی از خطهای (d) عبور نمی‌کند، و اگر ناحیهٔ خارجی بیضی را انتخاب کنیم، از هر کدام از نقطه‌های آنجا، دو نمونه از خطهای (d) عبور کند.

(۲) هر خط (d) بر بیضی c مماس است و این مطلب بسادگی، با حل معادلهٔ خط و بیضی بدست می‌آید:

$$\begin{cases} (m^2 - 1)x - 8my + 4(m^2 + 1) = 0 \\ x^2 + 16y^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

با حذف x ، بین دو معادلهٔ این دستگاه، به معادلهٔ درجه دوم زیر، نسبت به y ، می‌رسیم:

$$\begin{aligned} (m^2 + 1)^2 y^2 - 4m(m^2 + 1)y + 4m^2 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow [(m^2 + 1)y - 2m]^2 &= 0 \end{aligned}$$

وجود ریشهٔ مضاعف برای این معادله، به معنای مماس بودن خط d بر بیضی c است.

(۳) ضریب زاویهٔ خطهای d به صورت $\frac{m^2 - 1}{8m}$ است. اگر نقطهٔ

$M(\alpha, \beta)$ را در نظر بگیریم، از آنجا، دو نمونه از خطهای d می‌گذرد که مقدار m برای هر کدام از آنها، از معادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$(\alpha + 4)m^2 - 8\beta m - (\alpha - 4) = 0 \quad (1)$$

اگر ریشه‌های این معادله را m_1 و m_2 فرض کنیم، برای اینکه دو خطی که از M می‌گذرند، بر هم عمود باشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{m_1^2 - 1}{8m_1} \times \frac{m_2^2 - 1}{8m_2} = -1$$

که با استفاده از رابطه‌های مربوط به مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها در معادله (۱)، رابطه اخیر به این صورت درمی‌آید:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 17$$

یعنی مکان M دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات (همان مرکز بیضی) و شعاع مساوی $\sqrt{17}$. این دایره به دایره هونژ معروف است و از هندسهم می‌دانیم که شعاع آن مساوی $\sqrt{a^2 + b^2}$ است.

۴۰۱. صورت کلی معادله یک دایره چنین است:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

مختصات نقطه‌های A، B و C، باید در این معادله صدق کند. به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} 4 - 4\beta + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0 \\ 2 - 2\alpha - 2\beta + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0 \\ 8 - 4\alpha + 4\beta + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0 \end{cases}$$

اگر معادله اول را بترتیب از دو معادله دیگر دستگاه کم کنیم، بدست می‌آید:

$$\alpha - 2\beta = 1, \alpha - 3\beta = 3$$

که از آنجا $\beta = -2\alpha = -3$ بدست می‌آید و با قرار دادن در یکی از معادله‌های دستگاه $R = 5$ می‌شود.

$$\text{جواب: } (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

توضیح. برای حل این مسأله می‌شد از این خاصیت استفاده کرد که مرکز دایره، محل برخورد عمود منصف‌های دو ضلع AB و AC و شعاع آن مساوی فاصله مرکز تا یکی از این نقطه‌هاست.

۴۰۲. راهنمایی. اگر دو دایره مماس خارج باشند، طول پاره خط بین دو

مرکز برابر است بامجموع دوشعاع.

جواب: $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 37 = 0$

۴۰۳. اگر یکی از نقطه‌های برخورد دودایره را A و مرکزهای آنها

را ω و ω' فرض کنیم، وقتی که دودایره برهم عمود باشند، مثلث $\omega A \omega'$ در رأس A قائمه است، یعنی باید داشته باشیم:

$$\omega \omega'^2 = R^2 + R'^2$$

جواب: $(a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 = R^2 + R'^2$

۴۰۴. راهنمایی: مرکز تجانس دو دایره عبارتست از نقطه‌ای مانند ω ،

بنحوی که، اگر از آن خطی رسم شود تا دو دایره را بترتیب در نقطه‌های A و

A' قطع کند، داشته باشیم $\frac{\omega A}{\omega A'} = \frac{R}{R'}$ (شعاعهای دو دایره‌اند).

دودایره دارای دو مرکز تجانس‌اند که بر خط‌المرکزین آنها قرار دارد (یکی داخل پاره خط خط‌المرکزین و دیگری خارج آن)، بنحوی که پاره خط خط‌المرکزین را به نسبت دوشعاع تقسیم کند.

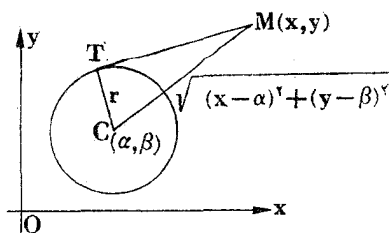
جواب: $\omega_1(-\frac{1}{3}, 1)$ ، $\omega_2(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

۴۰۵. راهنمایی: مماسهای مشترک دودایره، از مرکز تجانس دو دایره

می‌گذرند (دومماس مشترک خارجی در مرکز تجانس خارجی و دو مماس مشترک داخلی، در مرکز تجانس داخلی بهم می‌رسند).

جواب: مماسهای خارجی: $4x - 3y - 10 = 0$ و $5y - 2 = 0$

مماسهای داخلی: $3x + 4y - 5 = 0$ و $5x - 1 = 0$



شکل ۱۷۵

۴۰۶. اگر از

نقطه $M(x, y)$ ، مماس

MT را بر دایره به

مرکز $C(\alpha, \beta)$ و شعاع

مساوی r رسم کنیم، روش

است که داریم:

$$MT^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2$$

یعنی اگر معادله دایره، به صورت $f(x, y) = 0$ نوشته شود، عبارت $f(x, y)$ مساوی مجذور طول مماسی است که از نقطه $M(x, y)$ بر دایره رسم می‌شود. (شکل (۱۷۵).

جواب: طول مماس مطلوب مساوی ۴ است.

۴۰۷. بسادگی می‌توان ثابت کرد که معادله مفروض، نماینده دایره‌ای است که از دو نقطه برخورد (حقیقی یا موهومی) دو دایره

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \\ (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R_1^2 \end{cases} \quad (۱)$$

می‌گذرد و مرکز آن بر خط المרכזین این دو دایره واقع است. ضمناً مرکز این دایره، پاره خط محدود به دو مرکز دایره‌های (۱) را به نسبت λ قطع می‌کند. ۴۰۸. هر دایره‌ای که بادی دایره

$$(x - 5)^2 + y^2 = 5 \text{ و } x^2 + (y - 10)^2 = 130$$

یک محور اصلی داشته باشد، بین دسته دایره زیر است.

$$[(x - 5)^2 + y^2 - 5] + \lambda [x^2 + (y - 10)^2 - 130] = 0$$

که با قرار دادن مختصات نقطه $(-3, 1)$ در آن، مقدار λ بدست می‌آید.

$$\text{جواب: } (x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 50.$$

۴۰۹. اگر $M(\alpha, \beta)$ فرض کنیم، مختصات مرکز ثقل مثلث $G(\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3})$ می‌شود:

$$x = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \alpha = 3x; y = \frac{\beta}{3} \Rightarrow \beta = 3y$$

مختصات نقطه M در معادله بیضی صدق می‌کند:

$$\frac{9x^2}{a^2} + \frac{9y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{(\frac{a}{3})^2} + \frac{y^2}{(\frac{b}{3})^2} = 1$$

یعنی مکان مطلوب بیضی است که مرکز و محوره‌های آن بر مرکز و محوره‌های بیضی مفروض منطبق و طول قطرهای بزرگتر و کوچکتر آن بترتیب مساوی ثلث طول قطرهای بزرگتر و کوچکتر بیضی مفروض است.

۴۱۰. بنابر فرض داریم:

$$\frac{QM}{MP} = \lambda \quad \text{نقطه } M \text{ (شکل ۱۷۶).}$$

پاره خط PQ را به نسبت λ تقسیم می‌کند و بنابراین عرض این نقطه چنین می‌شود:

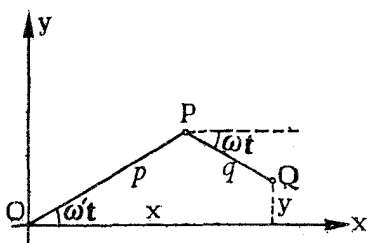
$$y = \frac{\lambda \sqrt{r^2 - x^2}}{1 + \lambda}$$

که پس از تبدیلهای ساده چنین می‌شود:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\lambda r}{1 + \lambda}\right)^2} = 1$$

یعنی مکان مورد نظر عبارتست از یک بیضی که مرکز آن بر مرکز دایره منطبق است

و مقادیر نیم‌قطرهای بزرگتر و کوچکتر آن $a = r$ و $b = \frac{\lambda r}{1 + \lambda}$ می‌باشد.



شکل ۱۷۷

۴۱۱. در لحظه

زمانی t ، میله OP با محور طول، زاویه‌ای مساوی ωt و میله PQ با همان محور، زاویه‌ای مساوی $-\omega t$ می‌سازد. برای پیدا کردن مختصات نقطه $Q(x, y)$ خط

شکسته OPQ را روی دو محور تصویر می‌کنیم:

$$x = O_x \text{ روی OP تصویر} + O_x \text{ روی PQ تصویر} = p \cos \omega t + q \cos \omega t ;$$

$$y = O_y \text{ روی OP تصویر} + O_y \text{ روی PQ تصویر} = p \sin \omega t - q \sin \omega t ;$$

$$Q \begin{cases} x = (p+q) \cos \omega t \\ y = (p-q) \sin \omega t \end{cases}$$

که با حذف t بین مختصات نقطه Q ، مکان آن بدست می‌آید:

$$\frac{x^2}{(p+q)^2} + \frac{y^2}{(p-q)^2} = 1$$

یعنی یک بیضی با نیم قطرهای مساوی $p+q$ و $p-q$.

اگر $p > q$ باشد، نقطه Q روی بیضی در جهت مثلثاتی حرکت می‌کند.

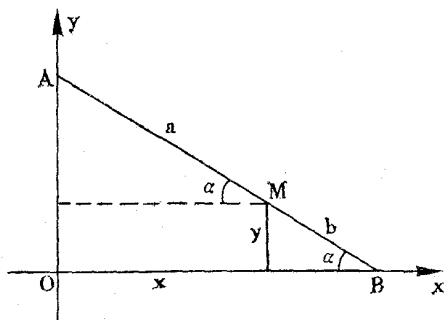
اگر $p < q$ باشد، نقطه Q روی بیضی در خلاف جهت مثلثاتی حرکت می‌کند.

در حالت $p = q$ ، ضمن یک دوران کامل میله OP ، نقطه Q ، دوبار پاره خطی

از محور Ox به طول $2(p+q)$ را طی می‌کند.

۴۱۲. دو انتهای پاره خط را A و B و $MA = a$ و $MB = b$ می‌گیریم

(a و b مقادیری ثابت‌اند). اگر زاویه حاده بین AB و محور طول را α و



شکل ۱۷۸

مختصات نقطه M را (x, y) فرض کنیم، داریم:

$$x = a \cos \alpha \quad \text{و} \quad y = b \sin \alpha$$

و بنابراین، معادله مکان M به صورت $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ درمی آید و این معادله

يك بیضی است به مرکز رأس زاویه قائمه و نیم قطرهای مساوی ba (شکل ۱۷۸).
در حالت خاصی که نقطه M در وسط پاره خط AB قرار گرفته باشد، مکان
مطلوب دایره‌ای است به معادله $x^2 + y^2 = a^2$.

وقتی که نقطه M بر امتداد AB باشد، اگر فاصله M را تا نقطه‌های

B و A بترتیب ba فرض کنیم، معادله مکان $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ می‌شود که در

هر حال يك بیضی است.

$$۴۱۳. \text{ جواب: بیضی } \frac{x^2}{14} + \frac{(y-1)^2}{7} = 1$$

۴۱۴. از شکل ۱۷۹ پیداست که

$MO + MA = OP$ ، مقداری است

ثابت و مساوی ۵؛ بنابراین مکان نقطه

M بیضی است که کانونهای آن O و A

و مقدار ثابت آن $2a = 5$ است.

جواب:

$$\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{4} = 1$$

شکل ۱۷۹

و یا: $16x^2 + 25y^2 - 48x = 64$

$$۴۱۵. \text{ جواب: } \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$$

۴۱۶. جواب: (۱) $A'(-3, 0), A(3, 0); F'(-5, 0), F(5, 0)$

(۲) مجانبها: $y = \pm \frac{4}{3}x$ ، خطهای هادی: $x = \pm \frac{9}{5}$ ، $e = \frac{5}{3}$

(۴) معادله هذلولی مزدوج: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ ، خروج از مرکز آن: $e' = \frac{5}{4}$.

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{۴۱۷. جواب:}$$

$$y = \pm 1/8, x = \pm \frac{4}{5} \sqrt{34} \quad (۱. ۴۱۸)$$

$$y = \pm \frac{3}{5} \sqrt{119}, x = 9/6 \quad (۲. دو نقطه).$$

۴۱۹. اگر روی هذلولی، نقطه‌ای وجود داشته باشد، که برای آن

$r_1 = d_1$ باشد، باتوجه به رابطه $\frac{r_2}{d_2} = e$ ، بدست خواهد آمد: $\frac{r_2}{r_1} = e$ یا

$$x = \frac{a(1+e)}{e^2 - e} : \frac{ex+a}{ex-a} = e \quad \text{از اینجا طول نقطه مجهول بدست می‌آید:}$$

ولی برای هر نقطه واقع بر هذلولی باید داشته باشیم: $x \geq a$. از آنجا به نامعادله

$$\frac{1+e}{e^2 - e} \geq 1 \quad \text{می‌رسیم که باتوجه به شرط } e > 1 \text{ (که برای هر هذلولی درست}$$

است)، بدست می‌آید: $e \leq 1 + \sqrt{2}$.

$$۴۲۰. جواب: \frac{a^2 b^2}{c^2} = \delta_1 \cdot \delta_2. \quad \text{بنابراین خاصیت، می‌توان تعریف}$$

جدیدی برای هذلولی پیدا کرد: هذلولی عبارتست از مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه، که حاصلضرب فاصله‌های هر یک از آنها تا دو خط متقاطع ثابت،

مقدار ثابتی باشد. این دو خط ثابت مجانبهای هذلولی خواهند بود.

۴۲۱. هر قطر هذلولی از مرکز آن می‌گذرد و معادله‌ای به صورت

$y = mx$ دارد. از حل معادله این خط، با معادله هذلولی، مختصات دو سر قطر

بدست می‌آید:

$$\left(\frac{24}{\sqrt{9-16m^2}}, \frac{24m}{\sqrt{9-16m^2}} \right) ;$$

$$\left(\frac{-24}{\sqrt{9-16m^2}}, \frac{-24m}{\sqrt{9-16m^2}} \right)$$

فاصله هر کدام از این نقطه‌ها، نامبداء مختصات (مرکز هذلولی)، باید مساوی ۱۰ باشد، که از آنجا مقدار m بدست می‌آید.

$$y = \pm \frac{4}{9} \sqrt{34} \quad \text{جواب:}$$

توضیح: اگر یکی از دوانتهای قطر مطلوب را $M(x, y)$ بگیریم، اولاً باید فاصله OM مساوی ۱۰ باشد، ثانیاً مختصات نقطه M در معادله هذلولی صدق می‌کند. بنابراین مختصات دوانتهای قطر را از دستگاه زیر هم می‌توان پیدا کرد:

$$9x^2 - 16y^2 = 576, \quad x^2 + y^2 = 100$$

۴۲۲. معادله خطی که از نقطه A می‌گذرد، به این صورت است:

$$y = mx - 3m - 1$$

ازحل این معادله بامعادله هذلولی، بهمعادله درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$(4m^2 - 1)x^2 - 8m(3m + 1)x + 4(9m^2 + 6m + 2) = 0$$

x' و x'' ریشه‌های این معادله، طولهای دوانتهای وتر هستند و چون نقطه A باید وسط این وتر باشد، داریم:

$$x_A = \frac{x' + x''}{2} \Rightarrow \frac{4m(3m + 1)}{4m^2 - 1} = 3 \Rightarrow m = -\frac{3}{4}$$

بنابراین، معادله وتر موردنظر به صورت $3x + 4y = 5$ درمی‌آید.

۴۲۳. با توجه به معادله مجانبها، رابطه $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ بین a و b بدست

می‌آید. ازطرف دیگر اگر شرط مماس بودن هذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ و خط

۰۴۲۳. $5x - 6y - 8 = 0$ را بنویسیم، به رابطه $25a^2 - 36b^2 = 64$ می‌رسیم. از این دو رابطه، مقادیر a و b بدست می‌آید.

$$\text{جواب: } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

۰۴۲۴. معادله هذلولی و بیضی را، وقتی که کانونهای مشترک داشته باشند، می‌توان به این صورت نوشت:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1, \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 - c^2} = 1$$

از حل این دو معادله باهم، به عنوان يك دستگاه دو معادله دو مجهولی، بدست می‌آید:

$$x^2 = \frac{A^2 a^2}{c^2} \quad \text{و} \quad y^2 = \frac{(c^2 - a^2)(A^2 - c^2)}{c^2}$$

از طرف دیگر، برای اینکه دو منحنی بر هم مماس باشند، باید حاصلضرب مشتقهای دوتابع آنها، در نقطه برخورد، مساوی ۱ - شود. مشتقهای دوتابع چنین اند:

$$y' = \frac{(c^2 - a^2)x}{a^2 y}, \quad y' = -\frac{(A^2 - c^2)x}{A^2 y}$$

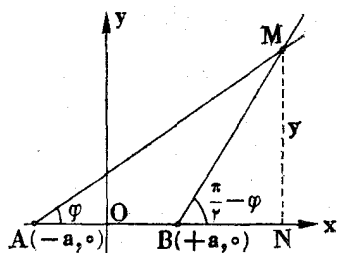
و حاصلضرب آنها چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{(c^2 - a^2)x}{a^2 y} \times -\frac{(A^2 - c^2)x}{A^2 y} &= \\ &= -\frac{(c^2 - a^2)(A^2 - c^2)x^2}{A^2 a^2 y^2} = -1 \end{aligned}$$

۰۴۲۵. $\delta_1 \cdot \delta_2 = -b^2$. علامت منفی به معنای اینست که کانونهای هذلولی در دو طرف مماس بر آن قرار دارند.

۰۴۲۶. عرض نقطه M ، محل برخورد دو میله، را از مثلثهای AMN و BMN بدست می‌آوریم (شکل ۱۸۵):

$$y = (x + a) \operatorname{tg} \varphi, \quad y = (x - a) \cot \varphi$$



شکل ۱۸۰

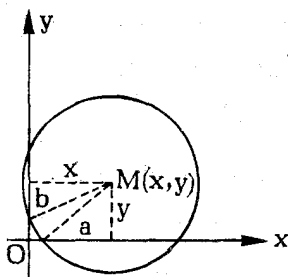
با ضرب این دو رابطه در یکدیگر، پارامتر φ حذف می شود و معادله مکان M به صورت :

$$x^2 - y^2 = a^2$$

در می آید.

مکان مطلوب عبارتست

از هذلولی متساوی الساقینی که رأسهای آن بر نقطه های A و B قرار دارد.



شکل ۱۸۱

۴۲۷. با توجه به شکل

۱۸۱ بسادگی داریم:

$$x^2 = R^2 - b^2 ;$$

$$y^2 = R^2 - a^2$$

و از آنجا، با حذف R، بدست می آید:

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2$$

مکان مورد نظر، يك هذلولی متساوی الساقین است.

۴۲۸. مسأله ۴۱۴ را ببینید. مکان مطلوب، هذلولی است که مرکز دایره

مفروض و نقطه مفروض، کانونهای آن هستند.

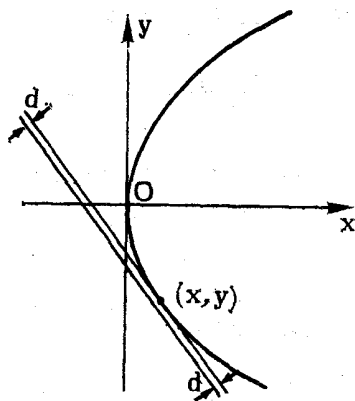
۴۲۹. راهنمایی. محور سهمی، محور تقارن این مثلث است. بنابراین يك

رأس مثلث بر رأس سهمی منطبق و ضلع روبروی به این رأس بر محور سهمی عمود است.

$$\text{جواب: } a_3 = \frac{4p}{3}$$

۴۳۰. راهنمایی: اگر خط راست، سهمی را قطع نکند، کوتاهترین فاصله

سهمی از آن عبارتست از فاصله نقطه ای از سهمی تا خط، که مماس در آن نقطه بر سهمی، با خط مفروض موازی باشد (شکل ۱۸۲).



جواب: $|d|=2$

۴۳۱. مماس مشترك دو منحنی

را $y = mx + n$ بگیرد و در مورد هر يك از منحنی ها، شرط مماس را بنویسد.

جواب:

$$x - 3y + 15 = 0 ;$$

$$x + 3y + 15 = 0$$

شکل ۱۸۲ ←

۴۳۲. محور مشترك دوسهمی را، محور طول و قانون مشترك را، مبداء

مختصات می گیریم. در این صورت می توان معادله سهمی ها را به این صورت نوشت:

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right), \quad y^2 = -2q\left(x - \frac{q}{2}\right)$$

نقطه های برخورد دومنحنی بسادگی بدست می آید:

$$A\left(\frac{q-p}{2}, \sqrt{pq}\right); \quad B\left(\frac{q-p}{2}, -\sqrt{pq}\right)$$

ضریب زاویه مماس بر هر يك از دوسهمی در نقطه A چنین می شود (به كمك مشتق):

$$m_1 = \frac{p}{\sqrt{pq}}; \quad m_2 = \frac{-q}{\sqrt{pq}} \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

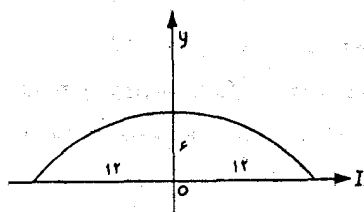
یعنی دومنحنی در نقطه برخورد A (و بهمین ترتیب در نقطه برخورد B) برهم عمودند.

۴۳۳. چون محور طول، محور سهمی و نقطه $(a, 0)$ رأس آنست، معادله

سهمی به صورت $y^2 = 2p(x - a)$ درمی آید. برای پیدا کردن پارامتر p ، از این خاصیت استفاده می کنیم که سهمی مفروض از نقطه های $(0, \pm b)$ می گذرد.

$$\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{جواب:}$$

۴۳۴. معادلهٔ سهمی (شکل ۱۸۳)



به صورت $\frac{x^2}{144} + \frac{y}{6} = 1$ و یا

$x^2 = -24(y - 6)$ درمی آید.

جواب: $p = -12$

شکل ۱۸۳

۴۳۵. معادلهٔ کلی منحنی درجه دوم به صورت:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

است. با قرار دادن مختصات نقطهٔ $(0, 0)$ در آن $f = 0$ بدست می آید. با قرار دادن مختصات چهار نقطه دیگر، چهار ضریب را بر حسب ضریب پنجم بدست آورید.

جواب: $3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$ (بیضی).

۴۳۶. معادلهٔ منحنی درجه دوم را به این صورت می گیریم:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

به علت اینکه، منحنی از مبدا مختصات می گذرد $f = 0$ می شود. از شرط مماس بودن منحنی بر خط $4x + 3y + 2 = 0$ در نقطهٔ $(1, -2)$ ، رابطه های زیر بدست می آید:

$$\frac{2a - 2c + d}{4} = \frac{c - 4b + e}{3} = \frac{d - 2e}{2}$$

و از شرط مماس بودن منحنی بر خط $x - y - 1 = 0$ در نقطهٔ $(0, -1)$ ، این رابطه ها بدست می آید:

$$\frac{d - c}{1} = \frac{e - 2b}{-1} = \frac{-e}{-1}$$

و به کمک این رابطه ها، معادله منحنی مطلوب بدست می آید.

جواب: $6x^2 - y^2 + 3xy + 2x - y = 0$ (هذلولی).

۴۳۷. در حالت کلی منحنی درجه دوم

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

از برخورد منحنی با خط $y = kx$ به معادله زیر می‌رسیم:

$$(bk^2 + ck + a)x^2 + (d + ek)x + f = 0$$

و برای اینکه این معادله، تنها یک جواب ساده داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$bk^2 + ck + a = 0$$

در حالت خاص مسأله ما، این معادله چنین می‌شود:

$$k^2 + k - 6 = 0 \Rightarrow k = 2, -3$$

جواب: $y = -3x$ و $y = 2x$

۴۳۸. راهنمایی. منحنی مفروض یک سهمی است و همه خطهایی که با آن تنها

یک نقطه تلاقی دارند، موازی با محور سهمی هستند.

جواب: $\varphi = \frac{\pi}{4}$

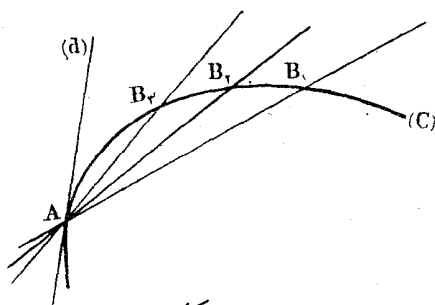
سرگرمی

ریاضیات تنها استفاده از رابطه‌ها نیست. بسیار پیش می‌آید، که اگر بدون توجه به نکته‌هایی که در يك مسأله وجود دارد و بدون توجه به تعریف دقیق مفاهیمی که باید مورد استفاده قرار گیرد، به حل ساده آن بپردازیم، دچار تناقض بشویم. در هیچ مرحله‌ای از ریاضیات نمی‌توان خود را بی‌نیاز از تفکر و استدلال دانست و این همان چیزی است که نقش انسان را در کارهای علمی مشخص می‌کند.

در این بخش به چند نمونه از اینگونه مسأله‌ها پرداخته‌ایم و توصیه می‌کنیم که خواننده، قبل از آنکه توضیحات و راه‌حلهای کتاب را ببیند، خود را بیازماید و اگر لازم می‌داند به تعریفها و روشهای درسی مراجعه کند و سپس برای بررسی راه‌حلهای خود، به کتاب مراجعه کند.

خط مماس بر منحنی - دو منحنی مماس برهم

از هندسه می دانیم که اگر خطی مثل AB_1 ، منحنی (C) را در دو نقطه A و B_1 قطع کند (شکل ۱۸۴)، وقتی که نقطه B_1 روی منحنی (C) به طرف نقطه



شکل ۱۸۴

A میل کند، خط AB_1 بطرف مماس (d) میل خواهد کرد. بنابراین خط مماس بر منحنی را می توان خط قاطعی دانست که دو نقطه برخورد آن با منحنی برهم منطبق شده باشد.

منحنی (C) و نقطه M را در نظر می گیریم (شکل ۱۸۵). خطی که از نقطه M عبور کند، ممکن است منحنی را مثلاً در دو نقطه A و B قطع کند، تا در نقطه T بر آن مماس باشد، و یا نقطه برخوردی با منحنی نداشته باشد. اگر معادله منحنی (C) را با معادله خطی که از نقطه M می گذرد، به عنوان يك دستگاه دو معادله دو مجهولی در نظر بگیریم، با حذف یکی از مجهولهای

دومی باریشهٔ مضاعف، برسیم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0 \\ y = mx - (m - 5) \end{cases} &\Rightarrow \\ \Rightarrow (m^2 + 1)x^2 - 2(m^2 - 4m + 3)x + m^2 - 8m + 21 = 0 & \\ \text{شرط وجود ریشهٔ مضاعف را در این معادله می‌نویسیم:} & \\ (m^2 - 4m + 3)^2 - (m^2 + 1)(m^2 - 8m + 21) = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow -16m - 12 = 0 & \end{aligned}$$

همانطور که می‌بینیم، به معادله‌ای درجهٔ اول نسبت به m رسیدیم که از آنجا

$$m = -\frac{3}{4}$$

بدست می‌آید. ظاهراً از اینجا باید این نتیجه را گرفت که از نقطهٔ

M تنها یک مماس می‌توان بر دایرهٔ مفروض رسم کرد. مختصات نقطهٔ تماس هم بسادگی بدست می‌آید. وقتی که معادلهٔ درجه دومی ریشهٔ مضاعف داشته باشد، این

ریشهٔ برابر با $-\frac{b}{2a}$ است و بنابراین اگر نقطهٔ تماس را T فرض کنیم، داریم:

$$x_T = \frac{m^2 - 4m + 3}{m^2 + 1} = \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{4}\right) + 3}{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{21}{5}$$

و با قرار دادن مقادیر m و x در معادلهٔ خط، عرض نقطهٔ تماس بدست می‌آید:

$$y_T = -\frac{3}{4} \times \frac{21}{5} + \frac{3}{4} + 5 = \frac{13}{5}; \quad T\left(\frac{21}{5}, \frac{13}{5}\right)$$

ولی از طرف دیگر می‌دانیم که از یک نقطهٔ واقع در خارج دایره، دو مماس می‌توان بر آن رسم کرد! و نتیجه‌ای را که در اینجا بدست آوردیم باید نادرست یا ناقص باشد.

(۱) بطور کلی تعداد مماسهایی که از یک نقطه بر یک منحنی می‌توان رسم کرد، مساوی درجه معادلهٔ منحنی (نسبت به x و y) است. بنابراین همیشه از یک نقطهٔ مفروض بزرگ منحنی درجه دوم، دو مماس می‌توان رسم کرد. این دو مماس ممکن است حقیقی و متمایز، حقیقی و منطبق بر هم و یا موهومی باشند. یعنی معادله‌ای که برای تعیین m ، ضریب زاویهٔ مماس، بدست می‌آید باید درجه دوم باشد (بادو ریشهٔ حقیقی یا موهومی یا یک ریشهٔ مضاعف) نه درجهٔ اول.

اگر باروش دیگری به جستجوی نقطه‌های تماس پردازیم، دقیق‌تر به ناقص بودن این نتیجه پی می‌بریم.

مختصات نقطه تماس را $T(\alpha, \beta)$ می‌گیریم، بنابراین ضریب زاویه خطی که از T و M می‌گذرد (خط مماس)، چنین می‌شود:

$$m_{MT} = \frac{\beta - 5}{\alpha - 1}$$

از طرف دیگر، ضریب زاویه مماس را باقرار دادن مختصات نقطه تماس در مشتق تابع هم می‌توان حساب کرد:

$$y' = \frac{x-3}{1-y} \Rightarrow m_{MT} = \frac{\alpha-3}{1-\beta}$$

از تساوی دو مقداری که برای ضریب زاویه مماس بدست آوردیم، این رابطه بین β و α بدست می‌آید:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 6\beta + 8 = 0$$

ضمناً مختصات نقطه تماس، در معادله دایره هم صدق می‌کند:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha - 2\beta + 6 = 0$$

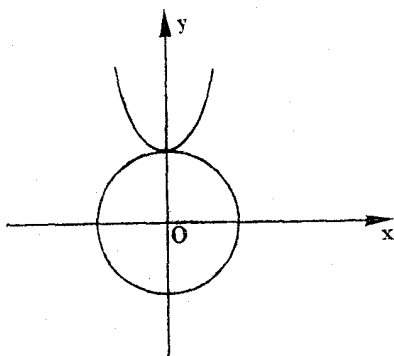
واز حل این دو معادله با یکدیگر، مقادیر α و β ، یعنی مختصات دو نقطه تماس بدست می‌آید:

$$T_1\left(\frac{21}{5}, \frac{13}{5}\right) \text{ و } T_2(1, 1)$$

چرا مختصات نقطه T_2 باروش اول بدست نمی‌آید؟ چگونه می‌توان با همان روش به وجود این نقطه هم پی برد و آنرا پیدا کرد؟

مسئله ۲.۲ R را طوری پیدا کنید که دایره $x^2 + y^2 = R^2$ بر سهمی $y = x^2 + 2$ مماس باشد.

حل. رسم هندسی (شکل ۱۸۶) بخوبی روشن می‌کند که مسأله يك جواب دارد: $R = 2$. به حل مسأله به طریق تحلیلی می‌پردازیم: اگر بین معادله دایره و



شکل ۱۸۶

معادله سهمی، x را حذف کنیم، بدست می‌آید:

$$y^2 + y - (R^2 + 2) = 0$$

برای اینکه، دو منحنی بر هم مماس باشند، باید این معادله ریشه مضاعف داشته باشد. شرط وجود ریشه مضاعف چنین است:

$$\Delta = 1 + 4(R^2 + 2) = 4R^2 + 9 = 0$$

که ریشه‌های آن نسبت به R موهومی

است و ظاهراً باید نتیجه گرفت که چنین دایره‌ای که بر سهمی مفروض مماس باشد، وجود ندارد.

چرا این نتیجه نادرست بدست آمده؟ اشکال کار در کجاست؟

مسئله ۳۸۱. سهمی $y = x^2 - 3x + 3$ و هذلولی $y = \frac{1}{x}$ مفروض‌اند.

وضع برخورد آنها را بررسی کنید.

حل. از حل معادله سهمی و هذلولی، بسادگی بدست می‌آید.

$$x^2 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

به این ترتیب دو منحنی تنها در نقطه $A(1, 1)$ بهم می‌رسند و چون در نقطه به طول ۱، عبارت $(x - 1)^2$ تغییر علامت می‌دهد، دو منحنی در این نقطه از هم عبور می‌کنند.

از طرف دیگر اگر معادله مماس بر هر یک از این دو منحنی را در نقطه برخورد بدست آوریم، برای هر دو منحنی، خط $x + y = 2$ پیدا می‌شود، یعنی دو منحنی در نقطه A ، مماس مشترک دارند و بنا بر این بر هم مماس‌اند.

این وضع را چگونه توجیه می‌کنید؟

محاسبه حد

مسئله ۴۳۲. مطلوبست حد تابع $y = \frac{\text{Arcsin } 2x - 2\text{Arcsin } x}{x^2}$ وقتی

x بسمت صفر میل کند.

روش اول. $\text{Arcsin } x = \beta$ و $\text{Arcsin } 2x = \alpha$ می گیریم، در اینصورت

$\sin \alpha = 2x$ و $\sin \beta = x$ و $\sin \alpha = 2 \sin \beta$ می شود. تابع مفروض را می توان چنین نوشت:

$$y = \frac{\alpha - 2\beta}{\sin^2 \beta} = \frac{\alpha}{\sin^2 \beta} - \frac{2\beta}{\sin^2 \beta} = \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{2\beta}{\sin^2 \beta}$$

می دانیم که $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\sin \lambda} = 1$ در مسئله ما، وقتی که x بسمت صفر میل کند،

α و β هم بسمت صفر میل می کنند و چون:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\beta}{\sin \beta} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$$

داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} y &= \lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{2}{\sin^2 \beta} \right) = \\ &= \lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = 0 \end{aligned}$$

روش دوم. از قاعده هوییتال استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{2x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-4x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-4x^2}} \right] = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{3} x \right]$$

$$x \frac{3x^2}{x^2 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-4x^2} (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4x^2})} = 1$$

حد y کدامیک از این دو مقدار است: ۰ یا ۱؟ چرا دورش مختلف، دو جواب مختلف بدست داده است؟

چند محاسبه

مسئله ۵۰. از دو عدد $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$ و $b = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}$ ، کدام بزرگترند؟

حل. اگر بجای ریشه سوم، باریشه دوم سروکار داشتیم، مقایسه دو عدد

بسادگی انجام می شد. مثلاً اگر بخواهیم دو عدد $x = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ و $y = 2 + \sqrt{3}$

را مقایسه کنیم، می نویسیم:

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} \wedge 2 + \sqrt{3}$$

(علامت $\wedge$ را به معنای کوچکتر یا بزرگتر گرفته ایم). چون دوطرف نامساوی

مثبت است، می توانیم آنرا مجذور کنیم:

$$2 + 5 + 2\sqrt{10} \wedge 4 + 3 + 4\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{5} \wedge \sqrt{6}$$

و چون $\sqrt{5} < \sqrt{6}$ پس $x < y$.

ولی این روش را برای مسئله مفروض نمی توان بکار برد (آزمایش

کنید). آیا باید کعب عددها را با تقریب لازم بدست آورد؟ می دانید که کعب گرفتن

احتیاج به وقت زیادی دارد، بخصوص اگر برای اطمینان، ناچار باشیم مثلاً تا

یکهزارم تقریب محاسبه کنیم. البته اگر حوصله بخرج دهیم، به این نتیجه ها

می رسیم:

$$a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5} \approx 1,260 + 1,710 = 2,970$$

$$b = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} \approx 1,442 + 1,587 = 3,029$$

و بنابراین نتیجه بگیریم: $a < b$.

اگر بجای ریشه سوم، مثلاً باریشه پنجم یا هفتم سروکار داشته باشیم، دیگر محاسبه مستقیم (بدون استفاده از جدولهای لگاریتم)، تقریباً غیر ممکن می شود.

آیا راه حل ساده ای بنظر تان می رسد؟ کمی فکر کنید، نوع عددها شما را راهنمایی می کند.

مسئله ۶. می خواهیم حاصل عبارت:

$$f(x) = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 11$$

را به ازای $x = 2 + \sqrt[3]{3}$ بدست آوریم.

آیا برای حل این مسئله، به محاسبه مستقیم پردازیم؟ می دانید که این راه بسیار مفصل و خسته کننده است. چه روشی برای این محاسبه پیشنهاد می کنید؟ مسئله ۷. می خواهیم حاصل عددی عبارت :

$$A = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^7 + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^7$$

را پیدا کنیم.

چه راه حلی پیشنهاد می کنید؟ آیا راهی غیر از روش مستقیم محاسبه وجود دارد؟

مسئله ۸. برای محاسبه حاصل این عبارت چه راه حلی پیشنهاد می کنید؟

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

مسئله ۹. می دانیم که اگر منحنی (C) ، شامل منحنی (C') هم باشد،

درجه معادله منحنی (C) ، از درجه معادله منحنی (C') کمتر نیست (یعنی با آن مساوی و یا از آن بیشتر است). مثلاً معادله نیمساز ربع اول و سوم $x - y = 0$ است، ولی معادله دو نیمساز محورهای مختصات (که شامل نیمساز ربع اول و سوم هم می باشد) به صورت $x^2 - y^2 = 0$ در می آید، که از درجه بالاتری است.

حالا نقطه $A(\alpha, \beta)$ را در نظر می‌گیریم، معادله این نقطه را (یعنی معادله‌ای را که تنها مختصات این نقطه، در آن صدق کند) می‌توان به صورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = 0$ نوشت. از طرف دیگر، معادله خطی که از نقطه A می‌گذرد، به صورت $mx - y = m\alpha - \beta$ درمی‌آید. این خط شامل نقطه A است، ولی درجه معادله‌اش، از درجه معادله نقطه، کمتر است. به این تناقض چه جوابی می‌دهید؟

حالا به بررسی وحل این مسأله می‌پردازیم.

حل مسأله ۱. ابتدا به این قضیه توجه می‌کنیم:

اگر در معادله

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + l = 0 \quad (۱)$$

ضریب درجه n ، یعنی a ، بسمت صفر میل کند، یکی از ریشه‌ها، بسمت بی‌نهایت میل می‌کند.

بدون اینکه وارد اثبات دقیق این قضیه بشویم، یادآوری می‌کنیم که اولاً هر معادله درجه n (n عددی صحیح است). همیشه دارای n ریشه است (که البته ممکن است بعضی از آنها موهومی یا تکراری باشند)، ثانیاً حاصلضرب این n ریشه (حقیقی یا موهومی) از لحاظ قدر مطلق برابر است با قدر مطلق نسبت مقدار ثابت معادله بر ضریب درجه n :

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{l}{a}$$

و روشن است که وقتی a بسمت صفر میل کند، $\frac{l}{a}$ و در نتیجه حاصلضرب ریشه‌ها بسمت بی‌نهایت میل می‌کند و این به معنای آنست که لااقل یکی از ریشه‌ها بسمت بی‌نهایت میل خواهد کرد.

روشن است که اگر $b \neq 0$ باشد، معادله:

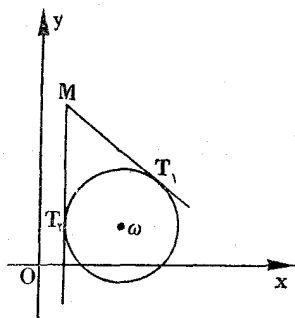
$$bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + l = 0$$

دارای $n-1$ ریشه مشخص (حقیقی یا موهومی) خواهد بود و بنابراین در چنین صورتی تنها یکی از ریشه‌های معادله (۱) بسمت بی‌نهایت میل می‌کند. آیا از اینجا می‌توان این نتیجه را گرفت که مثلاً هر معادله درجه اول، معادله درجه دوم است که يك ریشه آن بی‌نهایت است؟ یا بطور کلی هر معادله درجه n را معادله درجه m به حساب آورد ($m > n$) که $m-n$ ریشه آن مساوی بی‌نهایت است؟ روشن است که نه! هر معادله، تنها به تعداد درجه خود ریشه دارد، نه بیشتر و نه کمتر. بهمین مناسبت تشخیص درجه معادله، یکی از اساسی‌ترین نکته‌هایی است که باید برای حل معادله در نظر گرفته شود. به این معادله مثلثاتی توجه کنید:

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = d \quad (2)$$

این معادله، نسبت به سینوس و کسینوس و در نتیجه نسبت به تانژانت، از درجه دوم است، بنابراین اگر ضمن عمل، بدون توجه به ضریبهای خاص آن، روشی را برای حل انتخاب کردیم که مثلاً به معادله درجه اولی، نسبت به تانژانت، رسیدیم، به این معناست که این باید آنرا، معادله درجه دوم به حساب آورد که ضریب درجه دوم آن بسمت صفر میل کرده است. اگر در معادله (۲) داشته باشیم $a=d$ و برای حل آن، مجهولها را بر حسب $\tan x$ بنویسیم، چنین وضعی پیش می‌آید، که در این صورت $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ هم يك رشته از جوابهای معادله است (که به ازای آنها، $\tan x$ بسمت بی‌نهایت میل می‌کند).

در مورد روش اول حل مسئله ۱ هم، چنین وضعی پیش آمده است. چون از يك نقطه همیشه دو مماس (حقیقی یا موهومی) می‌توان بر يك منحنی درجه دوم رسم کرد، وقتی که می‌بینیم برای محاسبه ضریب زاویه مماس، يك معادله درجه اول رسیده‌ایم، باید آنرا معادله درجه دوم به حساب آورد، که ضریب درجه دوم آن بسمت صفر و بنابراین یکی از ریشه‌های آن بسمت بی‌نهایت میل



شکل ۱۸۷

کرده است. در واقع، اگر دایره مفروض را در دستگاه محوره‌ای مختصات رسم کنیم، معلوم می‌شود که یکی از دummاس مرسوم از نقطه M بر آن، خطی است موازی محور عرض و بنابراین ضریب زاویه‌ای مساوی بی‌نهایت دارد (شکل ۱۸۷).

بنابراین، باتوجه به این مطلب،

در راه حل اول هم متوجه می‌شدیم

که یکی از مماسها بر محور طول عمود است و چون از نقطه M می‌گذرد، معادله‌ای به صورت $x=1$ دارد، که با قرار دادن این مقدار x ، در معادله دایره، عرض نقطه T_2 بدست می‌آید.

حل مسأله ۲. سهمی و دایره، در حالت کلی، می‌توانند چهار نقطه برخورد

داشته باشند. اگر از حل معادله دایره و معادله سهمی به معادله درجه دومی برسیم، وجود ریشه مضاعف، در چنین معادله درجه دومی، به معنای اینست که سهمی و دایره در دو نقطه برهم مماس‌اند. به این مثال توجه کنید:

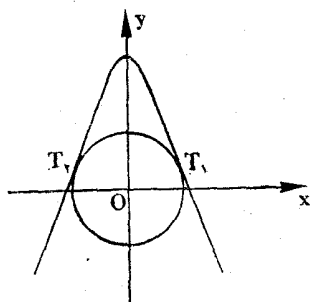
اگر دایره $x^2 + y^2 = R^2$ و سهمی $x^2 + y = 5$ در دو نقطه برهم مماس باشند، مقدار R و مختصات نقطه‌های تماس را پیدا کنید.

با همان روش حل تحلیلی مسأله ۲، مجهول x^2 را بین دو معادله حذف می‌کنیم، به معادله درجه دوم زیر، نسبت به مجهول y ، می‌رسیم:

$$y^2 - y - (R^2 - 5) = 0 \quad (1)$$

شرط وجود ریشه مضاعف را در این معادله می‌نویسیم:

$$\Delta = 1 + 4(R^2 - 5) = 0 \Rightarrow R^2 = \frac{19}{4}$$



شکل ۱۸۸

که در اینصورت $y = \frac{1}{2}$ می‌شود؛ یعنی

سهی و دایره در نقطه‌ای به عرض

$\frac{1}{2}$ بر هم مماس‌اند. ولی به ازای

$y = \frac{1}{2}$ ، دو مقدار برای x بدست

می‌آید: $x = \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$ ، و چون

$y = \frac{1}{2}$ ، ریشه مضاعف معادله (۱) است، دو نقطه $T_1(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ و

$T_2(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ نقطه‌های تماس دایره و سهی می‌شود.

در مسأله ۲، دایره $x^2 + y^2 = R^2$ و سهی $y = x^2 + 2$ نمی‌توانند

دردو نقطه بر هم مماس باشند و بهمین مناسبت برای R ، مقداری موهومی بدست آمده است.

مسأله ۲ را چگونه حل کنیم. باید ازحل معادله دایره و معادله سهی با

یکدیگر به معادله درجه چهارمی برسیم که یک ریشه مضاعف داشته باشد. برای این

منظور، مجهول y را بین دو معادله حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = x^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow x^4 + 4x^2 + 4 - R^2 = 0$$

برای اینکه این معادله، تنها یک ریشه مضاعف داشته باشد، باید با معادله‌ای که از مشتق

آن بدست می‌آید، یک ریشه مشترک پیدا کند. معادله مشتق چنین است:

$$4x^3 + 10x = 0$$

که تنها یک ریشه حقیقی $x = 0$ دارد. برای اینکه $x = 0$ ریشه معادله درجه

چهارم باشد، باید در آن صدق کند، که در اینصورت به رابطه $4 - R^2 = 0$

و یا $R=2$ می‌رسیم، که جواب مسأله است.

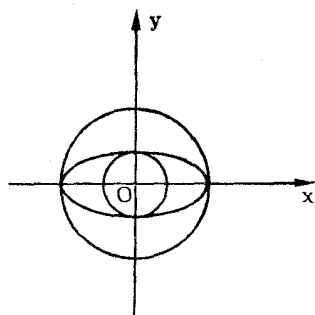
حالا از خواننده می‌خواهیم که این مسأله را تفسیر کند.

مسأله. R را طوری پیدا کنید که دایره $x^2 + y^2 = R^2$ بر بیضی

$$x^2 + 4y^2 = 4$$
 مماس باشد.

شکل ۱۸۹ به روشنی نشان می‌دهد که $R=1$ و $R=2$ جواب مسأله

است و در هر مورد هم، دایره در دو نقطه بر بیضی مماس است.



شکل ۱۸۹

ولی اگر به طریق تحلیلی دنبال

حل مسأله برویم، با حذف x^2 بین دو

معادله، به معادله $3y^2 = 4 - R^2$

می‌رسیم. و برای اینکه، این معادله

ریشه مضاعف داشته باشد، باید $R=2$

شود، یعنی با این روش تنها یکی از

دایره‌های مماس بدست می‌آید. اگر

هم بین دو معادله، y^2 را حذف کنیم، به

معادله $4 - R^2 - 3x^2 = 0$ می‌رسیم، که به ازای $R=1$ ، ریشه مضاعف دارد؛ با

این روش هم، تنها یکی از دایره‌ها (منتهی دایره دیگر)، بدست می‌آید.

چرا نمی‌توان هر دو جواب را، بایک روش بدست آورد؟ چرا در هر یک

از این روشها، یکی از جوابها پیدا نمی‌شود؟

حل مسأله ۳. در ابتدای فصل، این تعریف را پذیرفتیم:

دو منحنی وقتی بر هم مماس‌اند، که از حل معادله‌های آنها با هم، به

معادله‌ای برسیم که یک ریشه مضاعف داشته باشد.

این تعریف دقیق نیست و وقتی که در مسأله ۳، با استناد به آن، نتیجه

گرفتیم که: چون از حل معادله سهمی و هذلولی به معادله‌ای رسیدیم که دارای

ریشه تکراری از مرتبه سوم است (و نه ریشه مضاعف) و بنابراین برهم مماس

نیستند، درست نیست.

موضوع دو منحنی مماس برهم را دقیق‌تر بررسی کنیم. تعریف دقیق دو منحنی

مماس بر یکدیگر چنین است:

شرط لازم و کافی برای اینکه دو منحنی (C) و (C') در نقطه A بر هم مماس باشند، اینست که خط مماس بر منحنی C در این نقطه، بر خط مماس بر منحنی (C') در این نقطه، منطبق باشد. به عبارت دیگر تنها وقتی دو منحنی به معادله‌های $y=f(x)$ و $y=\varphi(x)$ در نقطه A به طول α بر هم مماس اند که داشته باشیم: $f'(\alpha)=\varphi'(\alpha)$.

از لحاظ جبری، از حل معادله‌های دو منحنی (یا يك خط و يك منحنی) مماس بر هم، به معادله‌ای می‌رسیم که نسبت به x ریشه تکراری دارد (که ممکن است از مرتبه زوج و یا از مرتبه فرد باشد)، ولی این شرط کافی نیست، یعنی وقتی از حل دو معادله بایکدیگر، به معادله‌ای باریشه تکراری برسیم، ممکن است نمایش تغییرات آنها بر هم مماس باشند و ممکن است بر هم مماس نباشند.

البته وقتی که دو منحنی (یا يك خط و يك منحنی)، در نقطه‌ای مانند A ، بر هم مماس باشند، اگر ضمن حل معادله‌های دو منحنی بایکدیگر، طول نقطه A ، ریشه تکراری مرتبه زوج معادله حاصل باشد، دو منحنی در نقطه تماس از هم عبور نمی‌کنند، و در حالتی که طول نقطه A ، ریشه تکراری از مرتبه فرد این معادله باشد، دو منحنی (یا خط و منحنی) در نقطه تماس از یکدیگر عبور می‌کنند. با چند مثال مطلب را روشن کنیم:

مثال ۱. مطلوبست معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=x^3+x$ در مبدأ مختصات.

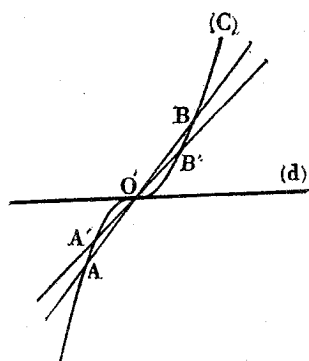
ضریب زاویه مماس بر منحنی در مبدأ مختصات، برابر است با ۱ و بنابراین معادله خط مماس به صورت $y=x$ درمی‌آید. اگر معادله منحنی را با معادله خط مماس، مثل دو معادله دو مجهولی در نظر بگیریم، بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y=x^3+x \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x^3=x \Rightarrow x_1=x_2=x_3=0$$

می‌بینیم که وقتی معادله منحنی و خط مماس را با هم حل کردیم، طول نقطه تماس

به عنوان ریشه تکراری از مرتبه سوم، بدست آمد و بنابراین نتیجه می گیریم که خط مماس، در نقطه تماس، از منحنی عبور می کند.

تعبیر هندسی این مطلب چنین است: مبدا مختصات، مرکز تقارن منحنی



شکل ۱۹۰

تابع مفروض است و بنابراین برای خطی که از این نقطه عبور کند و منحنی را در دو نقطه دیگر A و B قطع کند (شکل ۱۹۰)، پاره خطهای $O'A$ و $O'B$ ، مساوی می شوند. وقتی که نقطه A، روی منحنی، به نقطه O' نزدیک شود، نقطه B هم به O' نزدیک می شود، بنحوی که وقتی نقطه A بر O' منطبق شود، نقطه B هم بر O' منطبق می شود و

خط AB به صورت مماس (d) درمی آید. یعنی در این حالت خاص، برای اینکه خطی مثل $AO'B$ ، بر منحنی (C) مماس شود، دو نقطه A و B از آن بطور همزمان بر O' منطبق می شود و بهمین مناسبت در حل تحلیلی مسأله، $x=0$ ، به عنوان ریشه تکراری از مرتبه سوم بدست می آید.

مثال ۲. آیا خط $x+y=5$ بر نمایش تغییرات

$$3x^2 + y^2 - 4xy + 2y - 3 = 0 \quad (C)$$

مماس است؟

از حل دو معادله باهم (مثل دو معادله دو مجهولی)، بدست می آید:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 4xy + 2y - 3 = 0 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow 8(x-2)^2 = 0$$

$x=2$ ریشه مضاعف این معادله است، ولی از اینجا نمی توان بلافاصله به این نتیجه قطعی رسید که خط $x+y=5$ بر منحنی نمایش تغییرات (C) مماس است.

در حقیقت، معادله (C) قابل تجزیه است:

$$3x^2 + y^2 - 4xy + 2y - 3 = (x - y + 1)(3x - y - 3) = 0$$

و بنابراین نمایش تغییرات آن از دو خط تشکیل می‌شود که در نقطه $A(2, 3)$ یکدیگر را قطع می‌کنند و خط $x + y = 5$ هم، از نقطه برخورد آنها می‌گذرد و مسأله مماس بودن بی‌معنا می‌شود.

دیگر موضوع مسأله ۳، روشن است. سهمی $y = x^2 - 3x + 3$ و هذلولی

$y = \frac{1}{x}$ در نقطه به طول واحد، بر هم مماس‌اند و در این نقطه از هم عبور می‌کنند.

حل مسأله ۴. روشن است که روش هوپیتال، جواب درست را داده است. برای اینکه به اشکال روش اول پی ببریم، مثال ساده‌تری را ذکر می‌کنیم.

می‌خواهیم حد عبارت $\frac{\sin X - X}{X^2}$ را، وقتی که X بسمت صفر میل کند، پیدا

کنیم.

با روش هوپیتال، این حد بسادگی بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X - X}{X^2} &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\cos X - 1}{2X} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{-\sin X}{2X} = \\ &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{-\cos X}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ولی اگر می‌خواستیم با روش اول مسأله ۴، حل کنیم، کسر را به صورت

$\frac{\sin X}{X^2} - \frac{1}{X}$ می‌نوشتیم و چون حد مقدار $\frac{\sin X}{X}$ (وقتی که X بسمت صفر میل

کند)، برابر است با واحد، عبارت مفروض به صورت $\frac{1}{X^2} - \frac{1}{X}$ در می‌آید،

که مساوی صفر است.

در حقیقت وقتی که می‌گوئیم حد $\sin X$ با X (برای $X \rightarrow 0$) برابر

است با واحد به این معناست که اگر X ، بی‌نهایت کوچک باشد، X و $\sin X$ از

يك درجه‌اند:

$$\sin X = X - \frac{1}{3!}X^3 + \frac{1}{5!}X^5 - \frac{1}{7!}X^7 + \dots$$

از رابطه $\sin X$ پیدا است که:

$$\sin X - X = -\frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{120}X^5 - \frac{1}{5040}X^7 + \dots$$

و بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X - X}{X^3} &= \\ &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X^3 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{120}X^2 - \frac{1}{5040}X^4 + \dots \right)}{X^3} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

حل مسئله ۵. تابع $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$ را برای مقادیر مثبت x در

نظر می‌گیریم. مشتق این تابع $y' = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}$ به ازای مقادیر

مثبت x ، منفی است و بنابراین تابع y ، برای مقادیر مثبت x ، نزولی است. داریم:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

و چون تابع نزولی است، وقتی $x_2 > x_1$ باشد $y_2 < y_1$ می‌شود:

$$\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}$$

روشن است که اگر بجای ریشه سوم، ریشه پنجم، ششم و غیره هم بود، می‌توانستیم به همین ترتیب عمل کنیم.

حل مسئله ۶. معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن

$$x_1 = 2 + \sqrt{3} \text{ و } x_2 = 2 - \sqrt{3} \text{ باشد:}$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

از تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 4x + 1$ بدست می‌آید:

$$f(x) = (x^2 - 4x + 1)(x^5 - x^3 + x^2 - 7) + 2x - 4$$

و بنابراین:

$$f(2 + \sqrt{3}) = 2(2 + \sqrt{3}) - 4 = 2\sqrt{3}$$

برای اینکه مطلب روشن‌تر شود، مثال دیگری ذکر می‌کنیم.

مثال. حاصل کسر $F(x) = \frac{x^7 - 2x^6 - 2x^5 + x + 1}{x^8 - 2x^7 - 2x^6 - x + 3}$ را به ازای

$$x = 1 - \sqrt{3}$$

پیدا کنید.

معادله درجه دومی که باریشه‌های $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ و $x_2 = 1 + \sqrt{3}$

تشکیل شود، چنین است:

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

کسر را به اینصورت می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^5(x^2 - 2x - 2) + x + 1}{x^6(x^2 - 2x - 2) - x + 3} = \frac{(1 - \sqrt{3}) + 1}{-(1 - \sqrt{3}) + 3} = \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

حل مسأله ۷. $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ و $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ می‌گیریم و معادله

درجه دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن x_1 و x_2 باشد:

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (1)$$

برای محاسبه حاصل عبارت A ، باید مجموع توانهای هفتم ریشه‌های معادله (۱) را بدست آوریم:

$$x_1 + x_2 = 1 \text{ و } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3,$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 4,$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = 7,$$

$$A = x_1^5 + x_2^5 = (x_1^4 + x_2^4)(x_1 + x_2) - x_1^2x_2^2(x_1 + x_2) = 29$$

حل مسأله ۸. عبارت زیر را در نظر می گیریم:

$$S_k = \frac{a^k}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^k}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)}$$

بامحاسبه مستقیم وبه سادگی می توان بدست آورد:

$$S_0 = S_1 = 0, \quad S_r = 1$$

برای محاسبه S_p, S_r و غیره، می توان به این ترتیب عمل کرد: اتحاد زیر را در نظر می گیریم:

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$$

این اتحاد به ازای مقادیر $x=c, x=b, x=a$ ، بترتیب به اتحادهای زیر تبدیل می شود:

$$\begin{cases} a^3 - (a+b+c)a^2 + (ab+ac+bc)a - abc = 0 \\ b^3 - (a+b+c)b^2 + (ab+ac+bc)b - abc = 0 \\ c^3 - (a+b+c)c^2 + (ab+ac+bc)c - abc = 0 \end{cases}$$

دو طرف اتحاد اول را بر $(a-b)(a-c)$ و دو طرف اتحاد دوم را بر $(b-a)(b-c)$ و دو طرف اتحاد سوم را بر $(c-a)(c-b)$ تقسیم می کنیم. در اینصورت از جمع سه رابطه حاصل، بدست می آید:

$$S_r - (a+b+c)S_r + (ab+ac+bc)S_1 - abcS_0 = 0$$

که باتوجه به مقادیر $S_0 = S_1 = 0$ و $S_r = 1$ ، خواهیم داشت:

$$S_r = a+b+c$$

برای محاسبه S_p ، از این اتحاد استفاده می کنیم:

$$x(x-a)(x-b)(x-c) = x^4 - (a+b+c)x^3 + (ab+ac+bc)x^2 - abcx$$

وشبهه حالت قبل عمل می کنیم تا به این رابطه برسیم:

$$S_4 - (a+b+c)S_3 + (ab+ac+bc)S_2 - abcS_1 = 0$$

که از آنجا بسادگی بدست می آید:

$$S_4 = a^4 + b^4 + c^4 + ab + ac + bc$$

به همین ترتیب، می توان به رابطه زیر رسید:

$$S_5 - (a+b+c)S_4 + (ab+ac+bc)S_3 - abcS_2 = 0$$

که از آن، مقدار S_5 بدست می آید:

$$S_5 = a^5 + b^5 + c^5 + a^4b + a^4c + b^4a + b^4c + c^4a + c^4b + abc$$

همانطور که دیده می شود S_3 مجموع همه جمله های درجه اول (نسبت به a و b و c)
 S_4 مساوی مجموع همه جمله های درجه دوم (نسبت به a و b و c) و S_5 مساوی
 مجموع همه جمله های درجه سوم (نسبت به a و b و c) شده است:

$$S_3 = \sum a, S_4 = \sum(a^4 + ab), S_5 = \sum(a^5 + a^4b + abc)$$

$$S_6 = \sum(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^4bc), \dots$$

با همین روش می توان درباره محاسبه عبارت زیر (برای مقادیر صحیح k) و
 عبارتهای مشابه آن عمل نمود:

$$\sigma_k = \frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^k}{(b-a)(b-c)(b-d)} +$$

$$+ \frac{c^k}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^k}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

و بدست آورد:

$$\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 1, \sigma_4 = a+b+c+d,$$

$$\sigma_5 = a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + ab + ac + ad + bc + bd + cd, \dots$$

حل مسئله ۹. درست است که معادله درجه دوم

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = 0$$

در حوزۀ عددهای حقیقی، تنها نقطه $A(\alpha, \beta)$ را نشان می‌دهد، ولی در واقع (با فرض $\sqrt{-1} = i$)، می‌توان سمت چپ این معادله را تجزیه کرد:

$$[(x - \alpha) + i(y - \beta)][(x - \alpha) - i(y - \beta)] = 0$$

هر کدام از کروه‌ها، که مساوی صفر شوند، یک خط موهومی را نمایش می‌دهند:

$$\begin{cases} x + iy = (\alpha + i\beta) \\ x - iy = (\alpha - i\beta) \end{cases} \quad (1)$$

روشن است؛ خطی که معادله آن در فرض مسأله آمده است، شامل این دو خط نیست و بهمین مناسبت نتیجه‌گیری مسأله، بيمورد است.

خطهای (۱) را، خطهای ایزوتروپ گویند و دارای این خاصیتها

هستند :

۱. در نقطه حقیقی $A(\alpha, \beta)$ بهم می‌رسند.

۲. هر یک از این خطها بر خودش عمود است (زیرا اگر ضریب زاویه

هر یک از این خطها را در خودش ضرب کنیم، حاصلضرب مساوی ۱- می‌شود).

۳. اگر نقطه حقیقی این خطها، مبداء مختصات باشد ($\alpha = 0$ و $\beta = 0$)،

معادله دو خط به صورت $x \pm iy = 0$ درمی‌آید. اگر در این حالت، محورهای

مختصات را به اندازه زاویه φ دوران دهیم، با استفاده از رابطه‌های مربوط به

دوران محورها:

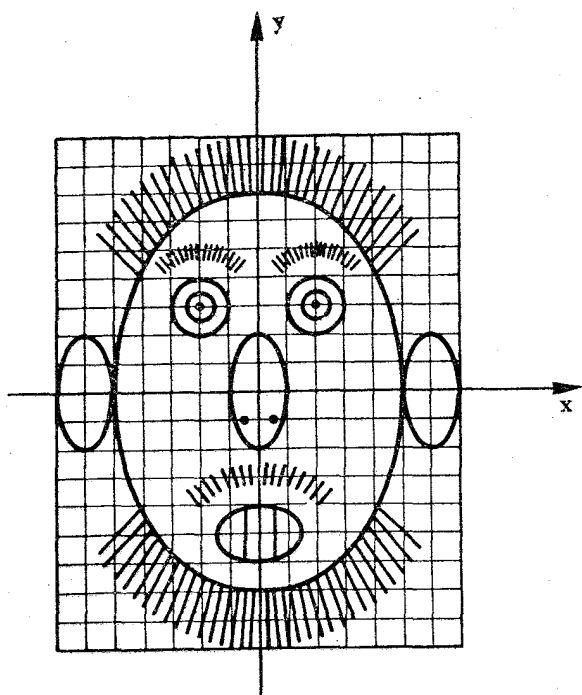
$$x = X \cos \varphi - Y \sin \varphi, \quad y = X \sin \varphi + Y \cos \varphi$$

معادله جدید این دو خط به $X \pm iY = 0$ تبدیل می‌شود. یعنی دوران محورها

(وقتی که مبداء بر نقطه حقیقی خطهای ایزوتروپ منطبق باشد)، تغییری در معادله آنها به وجود نمی‌آورد.

منحنی‌های جالب

I. به شکل ۱۹۱ توجه کنید. این شکل که سربك مرد را نشان می‌دهد، از



شکل ۱۹۱

شکلهای ساده هندسی (پاره خط - دایره - بیضی) به وجود آمده است. مادر اینجا تابعهایی را پیدا خواهیم کرد، که با رسم منحنی نمایش آنها، این شکل جالب بدست آید. شما می توانید شکلهای دیگری رسم کنید و با کمی دقت و حوصله، معادله های مربوطه را بدست آورید.

مبداء مختصات را بر وسط بینی و محورهای طول و عرض را بر امتداد

خطهای افقی و قائم می گیریم.

۱. مرکز چشمها و سوراخهای بینی

$$|2x^2 - 5|x| + 2| + |3y - 8|x| + 7| = 0 \quad (1)$$

مجموع دو قدر مطلق تنها وقتی مساوی صفر است، که هر کدام آنها مساوی

صفر باشد، که از آنجا چهار نقطه بدست می آید؛ که مختصات آنها در معادله (۱) صدق می کند:

$$A_1 \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}, A_2 \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}; B_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix}, B_2 \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix}$$

A_1 و A_2 ، مرکز چشمها و B_1 و B_2 ، سوراخهای بینی را مشخص می کنند.

۲. گوشها و بینی

$$4\left(x+a+\sqrt{-|a(a^2-36)|}\right)^2+y^2=4 \quad (2)$$

مقدار زیر رادیکال نمی تواند مثبت باشد و بنابراین معادله (۲)، تنها به ازای مقادیر $a=0$ و $a=\pm 6$ حقیقی است:

$$a=0; 4x^2+y^2=4 \Rightarrow x^2+\frac{y^2}{4}=1$$

که معادله بیضی قائمی است به مرکز مبدا مختصات و قطرهای $2a=4$ و $2b=2$. این بیضی معرف بینی شکل ۱۹۱ است.

$$a=\pm 6; 4(x\pm 6)^2+y^2=4 \Rightarrow (x\pm 6)^2+\frac{y^2}{4}=1$$

این دو بیضی، یکی گوش راست و دیگری گوش چپ را رسم می کند.

۳. دهان و دندانها

$$(y+5)(2x+n)\sqrt{9-4x^2-9(y+5)^2}=0 \quad (3)$$

که در آن، n عددی صحیح (مثبت یا منفی) فرض شده است.

هریک از این عاملها را می توان مساوی صفر گرفت:

$$9-4x^2-9(y+5)^2=0 \Rightarrow \frac{y^2}{9}+(y+5)^2=1$$

این بیضی، دوره دهان را نشان می دهد. ضمناً، از آنجا که عبارت

$$9 - 4x^2 - 9(y+5)^2$$

زیررادیكال قرار گرفته است، درمعادله (۳)، تنها مقادیری از x و y قابل قبول اند که به ازای آنها، این عبارت زیر رادیكال، مثبت یا صفر باشد. بسادگی معلوم می شود که این نقطه ها در داخل ویاروی محیط بیضی مقروض قرار دارند.

$$y+5=0 \quad -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

شرط رابه این مناسبت قرار دادیم، که نقطه های خط $y+5=0$ خارج بیضی دهان قرار نگیرند (و در نتیجه زیررادیكال، درمعادله (۳)، منفی نشود). پاره

خط $(-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2})y+5=0$ ، خط بین دندانه ها را مشخص می کند.

$$2x+n=0 \Rightarrow x=\pm 1 \text{ و } x=\pm \frac{1}{2}, x=0$$

اولا قدر مطلق n نمی تواند از ۳ بزرگتر شود، چون در این صورت، خط متناظر آن خارج بیضی دهان واقع خواهد شد. ثانیاً از این خطها هم، پاره خطهایی قابل قبول اند که محدود به محیط بیضی دهان باشند. این پاره خطها، دندانه ها را مشخص می کنند.

۴. چشمها

$$(x \pm 2)^2 + (y-3)^2 = a + \sqrt{-|4a^2 - 5a + 1|} \quad (4)$$

مقدار زیر رادیكال، تنها می تواند مساوی صفر شود که از آنجا $a=1$ یا

$a=\frac{1}{4}$ بدست می آید. در نتیجه چهار دایره زیر پیدا می شود:

$$(x \pm 2)^2 + (y-3)^2 = 1, \quad (x \pm 2)^2 + (y-3)^2 = \frac{1}{4}$$

که دایره های چشمها را مشخص می کنند.

۵. سر، موهای سر و موهای ریش

$$\left(x + y \cot \frac{m\pi}{64} \right) \sqrt{\frac{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} - 1}{1 - \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{81}}} = 0 \quad (5)$$

که در آن m عددی است صحیح با شرط $16 \leq |m| \leq 32$

بیضی $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$ ، دوره سر را مشخص می کند. ضمناً برای اینکه

مقدار زیررادیکال، منفی نباشد، نقطه‌هایی از صفحه محوره‌های مختصات برای

معادله (۵) قابل قبول است که بین دو بیضی $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$ و $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{81} = 1$

یاروی محیط آنها قرار گرفته باشند.

باصفر قراردادادن پراتنزجلو رادیکال باتوجه به شرط مربوط به m و

شرطی که برای (x, y) پیدا کردیم، پاره خطهای موهای سر و ریش بدست می آید.

۶. موهای سبیل

$$|x| - (y + 6) \cot \frac{k\pi}{32}$$

$$\sqrt{\left(\frac{4x^2}{25} + \frac{4(y+6)^2}{9} - 1 \right) \left(1 - \frac{4x^2}{49} - \frac{4(y+6)^2}{25} \right)} = 0 \quad (6)$$

که در آن k عددی است صحیح با شرط $8 \leq |k| \leq 16$.

برای اینکه زیررادیکال مخرج منفی نباشد، نقطه‌هایی از صفحه محوره‌های

مختصات در معادله (۶) صدق می کند که اولاً مختصات آنها صورت کسر را صفر

کند، ثانیاً بین دویضی زیر واقع باشند:

$$\frac{x^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(y+5)^2}{\frac{9}{4}} = 1, \quad \frac{x^2}{\frac{49}{4}} + \frac{(y-5)^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

که باتوجه به شرط k ، پاره خطهای مربوط به موهای سیل را می دهد.

۷. موهای دو ابرو

$$|x \pm 2| - (y - 3) \cot \frac{p\pi}{32}$$

$$\sqrt{[(x \pm 2)^2 + (y - 3)^2 - \frac{9}{4}][\frac{25}{4} - (x \pm 2)^2 - (y - 3)^2]} = 0. \quad (7)$$

که در آن p عددی است صحیح با شرط $8 < |p| < 16$.

وجود مخرج نشان می دهد که تنها نقطه هایی از صفحه محوره های مختصات

در معادله (۷) صدق می کند که بین یکی از زوج دایره های زیر باشند:

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{9}{4}, \quad (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{25}{4}$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{9}{4}, \quad (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{25}{4}$$

و به این ترتیب پاره خطهای معرف موهای دو ابرو بدست می آید.

II. ریاضیات و گیاه شناسی^۱

تصویر ۱، از شکل ۱۹۲ را ملاحظه کنید. اغلب کسانی که به مظاهر طبیعت

عشق می ورزند، بانام آنها آشنا هستند (مردم به این گیاه «شبر» می گویند). ولی

۱. این مقاله از مجله «علم و زندگی»، چاپ شوروی ترجمه و یکبار هم در

شماره هشتم سال پنجم مجله سخن علمی چاپ شده است. نویسنده مقاله،

و. داسوخیین است.

نادرند کسانی که به معادلهٔ ریاضی برگ این علف فکر کرده باشند. این معادله چنین است (دردستگاه مختصات قطبی):

$$\rho = 4(1 + \cos^3 \varphi + \sin^2 \varphi)$$

منحنی این معادله، بادقت تمام شکل برگ شبدر را تقلید کرده است (شکل ۱۹۲-۲).
و چقدر برگ «آلالهٔ زرد» که در شکل ۱۹۲-۳، می بینید، به بیضی «مونگر» (شکل ۱۹۲-۴) شبیه است. این منحنی از درجهٔ ششم، و معادلهٔ ضمنی آن در دستگاه محورها ی قائم، چنین است:

$$(x^2 + y^2)^2 - 3ax^2(x^2 + y^2) + (a^2 - r^2)x^4 = 0$$

بیضی «مونگر» به این ترتیب رسم می شود: دایره ای در نظر می گیریم، که مرکز آن روی محور طول و مبداء مختصات در خارج دایره واقع باشد. هر نقطهٔ P از دایره را، به نقطهٔ P_1 از بیضی، به این ترتیب تبدیل می کنیم:

نقطهٔ P را به مبداء مختصات وصل می کنیم، از P عمودی بر محور طول فرود می آوریم، سپس از نقطهٔ Q (پای عمودی که از P بر محور طول رسم کردیم)، عمود QP_1 را بر OP رسم می کنیم، مکان هندسی نقطهٔ P_1 ، بیضی «مونگر» خواهد بود.

ریاضی دانهای یونان قدیم هم به شباهت بعضی از منحنی ها با دنیای گیاهان توجه کرده بودند، ولی علاقه به مطالعهٔ اینگونه منحنی ها، از بین رفت تا اینکه در سده های میانه، با کشف روش مختصات، دوباره از نو زنده شد. این روش در سال ۱۶۳۷، به وسیلهٔ دانه دکارت، در کتاب «هندسه» شرح داده شد. باروش مختصات می توان، منحنی را متناظر با معادلهٔ آن رسم کرد. درعین حال این روش منجر به کشف آنالیز بی نهایت کوچکها شد. این وسیلهٔ جدید ریاضی، باز هم امکانهای تازه تری برای بررسی منحنی ها، برای ما به وجود آورد. مسأله های زیادی که در دانشهای مکانیک، نجوم، نور و مساحی، در سده های ۱۷ و ۱۸ مطرح شد، علاقهٔ ریاضی دانهای بزرگ را به مطالعهٔ منحنی ها، جلب کرد.

خود دکارت، با استفاده از روش مختصات، منحنی را پیدا کرد، که نام

شاعرانه «گلبرگ یاسمن» را بر آن گذاشت (شکل ۱۹۲-۵). معادله این منحنی $x^3 + y^3 = 3axy$ است. «گلبرگ یاسمن» امروزه «برگ دکارتی» نامیده می شود.

در سده هیجدهم گراندی، هندسه دان ایتالیائی، کوشش کرد معادله های مربوط به شکل ظاهری گلها را پیدا کند. خانواده منحنی هایی که مورد بررسی گراندی قرار گرفت، در ریاضیات بنام خانواده «گل سرخ» مشهور شد، اگرچه از نظر ظاهر، این منحنی ها بیشتر شبیه گلهایی از خانواده پرپر هستند (شکل ۱۹۲-۶) مجموعه این منحنی ها را می توان در دستگاه مختصات قطبی با معادله $\rho = a \sin k\varphi$ بیان کرد، که در آن k و a مقادیر ثابت و مثبتی هستند. با انتخاب مقادیر مختلف برای k ، می توان گلهایی با تعداد دلخواه گلبرگ بدست آورد. مقدار a هم طول گلبرگ را معین می کند (در شکل ۱۹۲-۶، منحنی های مختلفی از خانواده «گل سرخ» رسم شده است و ضریب تناظر k مربوط به آنها، در زیر هر یک ذکر شده است).

ها به نیخت، هندسه دان آلمانی هم روی شکل گلها و برگها، بررسیهای زیادی انجام داد که نتیجه تحقیقات او در سال ۱۸۹۶ بنام «شکلهای تحلیلی برگها» منتشر شد.

ها به نیخت، معادله هایی پیدا کرد که با تقریب خوب، شکل برگ درختهای افرا، ترشک و بید را بدست می داد. هم او، معادله شکل برگ شبدر را پیشنهاد کرد که منحنی آن در شکل ۱۹۲-۲ رسم شده است. بعضی از معادله های ها به نیخت چنین است:

$$\rho = 4(1 + \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi) \quad \text{برگ ترشک}$$

$$\rho = 3(1 + \cos^4 \varphi) + 2 \cos \varphi + \sin^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cos^4 \frac{\varphi}{2} \quad \text{برگ عشقه}$$

نوع استقرار میوه گیاهان هم، در موارد زیادی، مورد بررسی ریاضی دانها قرار گرفته است. مثلاً ثابت کرده اند که در گل آفتاب گردان، نظم استقرار

تخمه‌ها، شبیه قوس «مارپیچ لگاریتمی» است (شکل ۱۹۲ - ۷). در دستگاه مختصات قطبی، منحنی «مارپیچ لگاریتمی» با معادله‌ای به صورت $\rho = a^{\varphi}$ بیان می‌شود، که در آن a عدد دلخواه مثبتی است. اگر $a < 1$ باشد، مارپیچ دور مرکز و در جهت مثلثاتی، و در حالت $a > 1$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیچد. بررسی این منحنی‌ها، در پیشرفت ریاضیات و صنعت، نقش اساسی دارد. مثلاً معلوم شد که بین «گل سرخ»ها و سیکلوئیدها، رابطه‌ی خیلی نزدیکی وجود دارد. معلوم شد که «گل سرخ»ها، خط سیری را که به وسیله‌ی بعضی از مکانیسمها رسم می‌شود، معین می‌کنند و غیره.

با استفاده از خاصیت مارپیچهای لگاریتمی، که شعاع حاملهای خود را تحت یک زاویه قطع می‌کنند، می‌توان کاردهایی به شکل این منحنی‌ها ساخت که ضمن چرخش، برشهایی با زاویه ثابت به وجود آورند. از اینگونه کاردها، در ماشین‌های علف‌بری استفاده کرده‌اند.

از این خاصیت، در صنعت استفاده از آبهای طبیعی هم استفاده می‌کنند. وقتی که لوله، جریان آب را وارد توربین می‌کند، شکل مارپیچی به آن می‌دهد. در این حالت ثابت بودن زاویه بین شعاع حامل و مماس بر مسیر منحنی، منجر به کم کردن انرژی از بین رفته، در موقع تغییر جریان آب در لوله، می‌شود.